

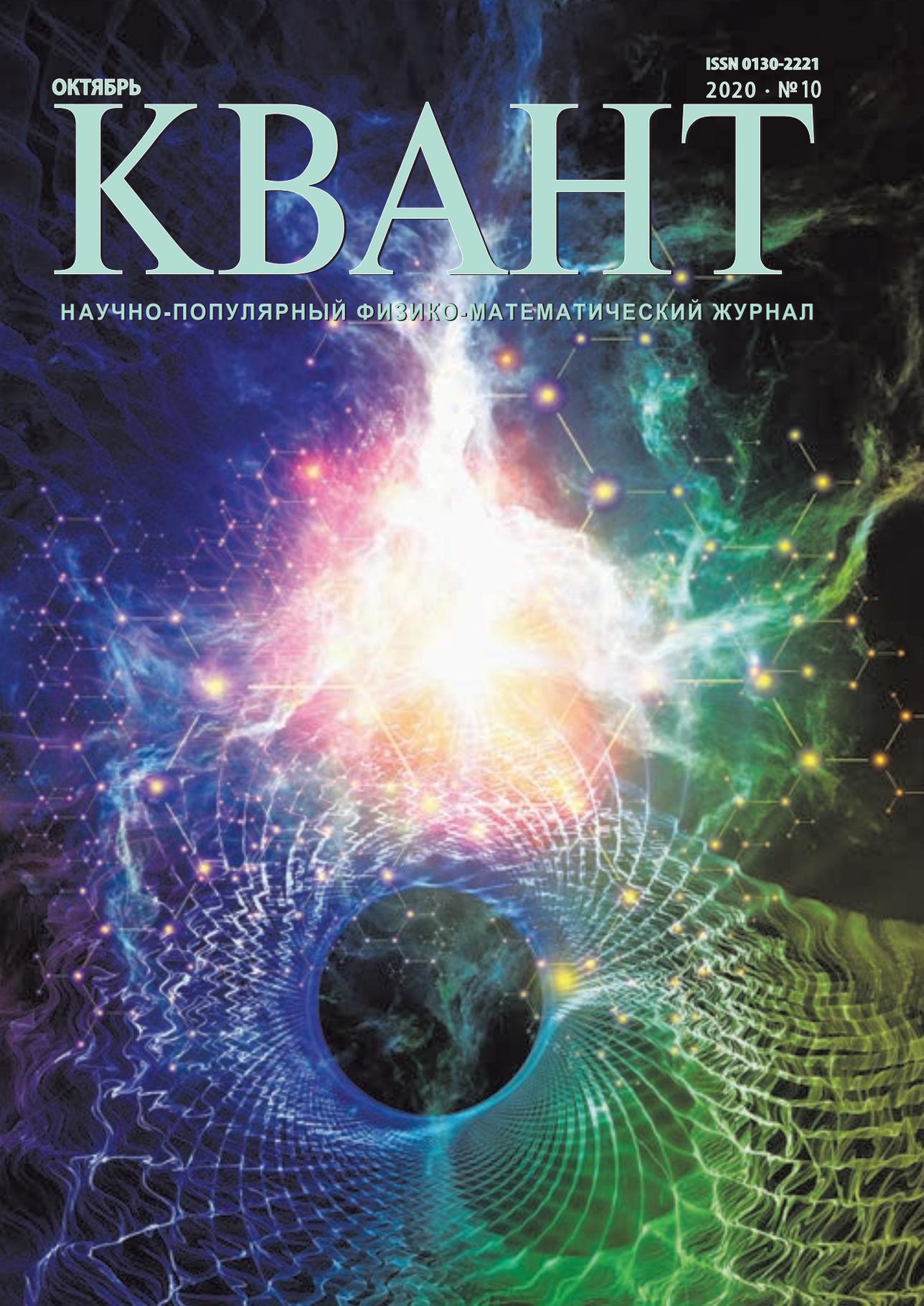
ОКТАБРЬ

ISSN 0130-2221

2020 · № 10

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



## ШАХМАТНБЕ

## «кубики сома»

В головоломке «кубики сома», придуманной Питом Хейном в 1933 году, требуется сложить куб  $3 \times 3 \times 3$  из семи деталей – шести пространственных тетрамино и одного уголка-тримино. Несмотря на свой почтенный возраст, она продолжает приносить все новые задачи для любителей головоломок. Мы уже дважды рассказывали о ней и ее вариантах только в этом году – в выпусках «Кванта» №5 и №7. И вот еще одна вариация на тему этой замечательной головоломки, предложенная Олегом Смольяковым.



Набор состоит из все тех же деталей, но на этот раз каждый единичный кубик склеен из половинок двух цветов. А куб  $3 \times 3 \times 3$  нужно сложить так, чтобы темный и светлый цвета чередовались друг с другом. Ясно, что такое требование сильно ограничивает возможности и далеко не все из 240 решений оригинальных «кубиков сома» здесь подойдут. Интересно, сколькими способами можно сложить такой шахматный куб?

Желаем успеха!

*Е.Епифанов*

## В номере:

### УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белоухов,  
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,  
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников  
(заместитель главного редактора),  
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,  
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

### ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Физика, геометрия и красота. *А.Варламов,  
Ж.Виллен, А.Ригамонти*  
7 Чувствительность булевых функций.  
*А.Разборов*

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 17 Задачи

### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 18 Задачи M2622–M2625, F2629–F2632  
19 Решения задач M2610–M2613, F2617–F2620

### КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 25 Задачи 5–8

### ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 26 Попробуем решить иначе *М.Бондаров*

### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Как проверить число на простоту?

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 34 Числа харшад. *А.Толпыго*

### ОЛИМПИАДЫ

- 39 LXI Международная математическая олимпиада

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 41 Институт криптографии, связи и информатики  
Академии ФСБ России  
46 Новосибирский государственный университет

- 54 Ответы, указания, решения

Внимание наших читателей (6,53)

### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Физика, геометрия  
и красота»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Физика, геометрия и красота

**А.ВАРЛАМОВ, Ж.ВИЛЛЕН, А.РИГАМОНТИ**

**КАК НЕ ИЗУМЛЯТЬСЯ ТВОРЕНИЯМ** природы? Эмоции переполняют нас при виде совершенной симметрии кристаллов или разнообразия фигур Хладни. Ученые тоже не остаются равнодушными к красоте природы. Луи де Бройль говорил о «таинственной красоте обличий, принимаемых электрическим разрядом» (речь, посвященная Жану Перрену, 1962). Гейзенберг, который выступил с докладом о «Значении красоты в точных науках» (*Die Bedeutung Schönen in der exakten Naturwissenschaft*), писал: «Внутренние связи [атомов в квантовой теории] в математических абстрациях демонстрируют невероятную степень простоты и красоты – дар, который нам остается только смиренно принять. Даже Платон не мог представить подобную красоту. Она не могла быть придумана, она существует с момента сотворения мира». А вот что полагал Эйнштейн: «Что же до простоты и красоты [природы], я отдаю должное эстетическим аспектам <...> Я преклоняюсь перед простотой и красотой математических моделей, созданных природой».

Следуя за великими физиками, заглянем в микромир и восхитимся некоторыми художественными творениями природы. В них задействован очень распространенный элемент – углерод.

## Метаморфозы углерода

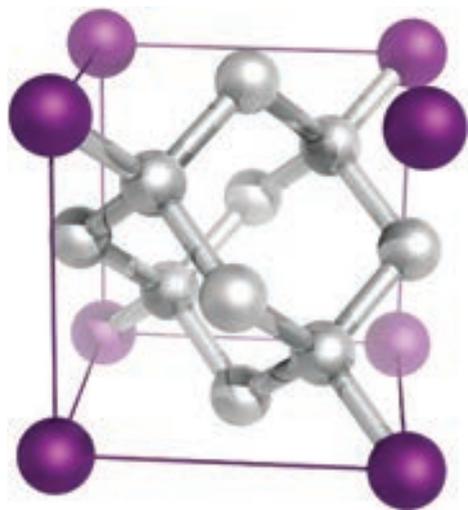
Итальянский писатель и химик Примо Леви (известный автобиографическими произведениями о своем пребывании в Освенциме) говорил об углероде: «Углерод – особый элемент, единственный, способный соединяться сам с собой и образовывать без большого расхода энергии длин-

ные устойчивые цепи, а для жизни на Земле (той единственной формы жизни, которая нам известна) нужны как раз длинные цепи. Потому-то углерод и является ключевым элементом в создании жизни». Эти длинные углеродные цепи, к которым присоединяются атомы водорода, а иногда и кислород, азот, фосфор, являются основой молекул, составляющих химию живого мира. Например, белки и сахара или же такая совершенная молекулярная структура, как ДНК (рис.1).

Чистый углерод также обладает удивительными свойствами, о которых и не подозревал Примо Леви, когда писал эти строки в 1970 году. До недавнего времени (скажем, до 1990 года) учебники говорили



*Рис. 1. Двойная спираль молекулы ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты), которая кодирует генетическую информацию. Структура ДНК была выявлена с помощью рентгеновской дифракции. Молекула состоит из четырех типов нуклеотидов, которые комплементарно собраны на каждой нити, что дает ей возможность реплицироваться (возобновляться)*



*Рис. 2. Кристаллическая структура алмаза представляет собой гранецентрированную кубическую решетку, в которую включено четыре дополнительных атома углерода. Каждый атом окружен четырьмя соседями, которые образуют правильный тетраэдр*

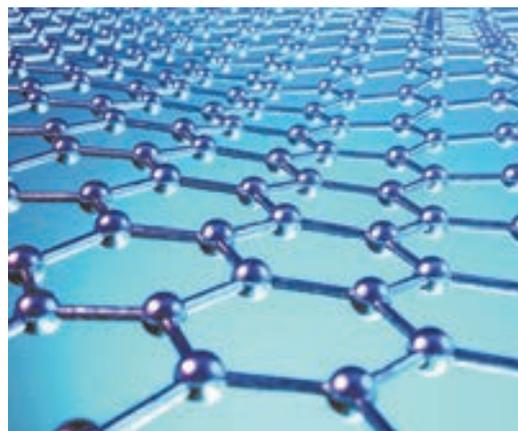
о существовании двух кристаллических модификаций углерода – довольно распространенного графита и алмаза.

Алмаз – редко встречающийся кристалл, крупные образцы которого может создавать только природа при экстремальных температурах и давлениях. И все же химически алмаз является самой простой модификацией углерода (рис.2): в ней каждый атом имеет четырех соседей, с которыми образует очень прочные химические связи, называемые ковалентными. Стремление атома углерода иметь четырех соседей – результат довольно простых законов химии. Действительно, в атоме углерода, шестого элемента периодической таблицы, имеется шесть электронов. В упрощенной модели электроны распределяются вокруг ядра по оболочкам. Два ближайших к ядру электрона образуют «замкнутую оболочку»: они химически инертны. Остальные четыре электрона находятся на второй, более удаленной от ядра оболочке. Однако на ней хватило бы места и для восьми электронов, а атомы, как правило, стремятся иметь такую электронную структуру, чтобы их внешняя оболочка была заполненной. Это найден-

ное химиками древности «правило октета» (или, для самых легких элементов, «правило дуэта») – закон, который современные ученые объясняют с помощью квантовой механики. Ради его соблюдения атомы готовы получать или терять электроны, образуя ионы, или делить электроны с другими атомами, создавая ковалентные связи.

В алмазе каждый из четырех электронов внешней оболочки соединяется с электроном внешней оболочки другого атома с образованием четырех связей С–С, и, таким образом, правило октета оказывается соблюденным. Итак, каждый атом в алмазе имеет четырех соседей. Полученная таким образом структура оказывается невероятно прочной, и поэтому алмаз является очень твердым веществом.

Как мы уже упоминали, алмаз – редкая модификация углерода. По прихоти химии атомы углерода более склонны образовывать двумерную структуру, в которой каждый из них связывается только с тремя другими. Таков двумерный кристалл – графен (рис.3). Оставшийся незадействованным четвертый электрон внешней оболочки (один на атом) готов участвовать в формировании слабой связи, которая соединяет между собой один слой графена с другим, другой с третьим и т.д. В результате такой упаковки формируется графит – наиболее распространенная форма кристаллического углерода (рис.4). Это твердое темное вещество может служить,



*Рис. 3. Графен состоит из атомов углерода, образующих решетку в виде сот*

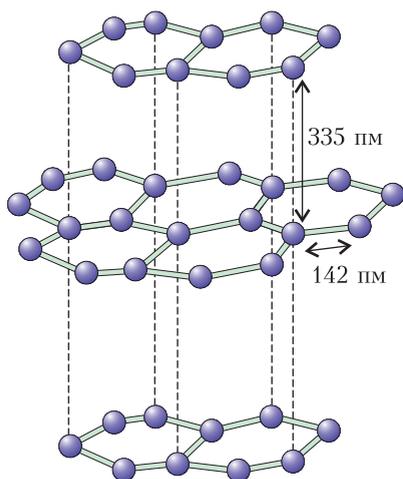


Рис. 4. Графит состоит из совокупности слабо связанных между собой слоев графена (эти слабые связи изображены пунктиром)

например, в качестве грифеля в обычном карандаше.

Соединяющие между собой слои графита слабые связи оказываются непрочными, и их довольно легко разорвать. Например, наклеивая на графит скотч и отрывая его, легко несколько слоев отделить; повторив такую процедуру несколько раз, в конце концов можно получить и единственный слой графена. Этот простой и нашедший широкое применение метод принес в 2010 году Нобелевскую премию по физике Андрею Гейму и Константину Новоселову.

Часто электрон внешней оболочки, не находящий себе ковалентной связи, немного усиливает три связи своих собратьев с электронами соседних атомов. Вместо того чтобы упаковываться с другими слоями в трехмерный графит, слой графена деформируется, переставая быть плоским, и спонтанно образует необычные структуры. Опишем некоторые из них.

### Когда углерод играет в футбол

В результате наблюдений и анализа исследователи в разных частях мира пришли к выводу, что в саже и пламени свечи появляется небольшое количество специфического вещества, молекулы которого состоят из 60 атомов углерода ( $C_{60}$ ). Атомы углерода в нем связываются так, что

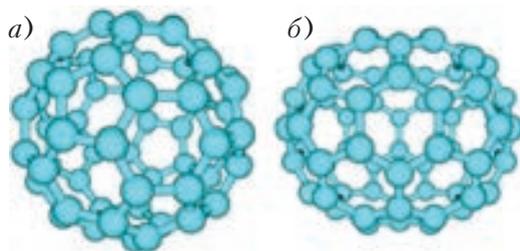


Рис. 5. а) Молекула  $C_{60}$  воспроизводит форму футбольного мяча, который состоит из кожаных пяти- и шестиугольников. б) Молекула  $C_{70}$  отдаленно напоминает мяч для регби

образуют 20 шестиугольников и 12 пятиугольников, воспроизводя таким образом форму футбольного мяча (рис.5,а).

Впоследствии, после открытия молекулы  $C_{60}$ , в природе были обнаружены или синтезированы и другие, более крупные, молекулы, также состоящие из шести- и пятиугольников. Так, например, молекула  $C_{70}$  скорее имеет форму мяча для регби: она состоит из 25 шестиугольников и 12 пятиугольников (рис.5,б). К таким молекулам относится и гигант  $C_{540}$  (рис.6), который довольно легко получается путем испарения графита посредством облучения лазерным импульсом или дугового разряда. Такие молекулы, возможно, могут входить в состав межзвездной пыли.

Все эти молекулы, принимающие форму выпуклых многогранников и имеющие формулу  $C_{2n}$ , где  $n$  – целое число, могут

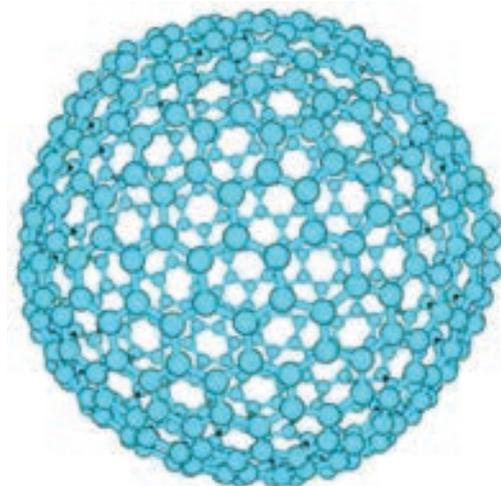


Рис. 6. Молекула  $C_{540}$

содержать разное число шестиугольников, но всегда 12 пятиугольников. Как это объяснить?

Пусть  $h$  – количество шестиугольников и  $p$  – количество пятиугольников. Согласно справедливой для многогранников теореме Эйлера, при условии, что выпуклый многогранник имеет  $f$  граней,  $s$  вершин и  $a$  ребер, эти три числа должны удовлетворять формуле  $f + s = a + 2$ . Числа  $f$ ,  $s$  и  $a$  легко находятся из количества шести- и пятиугольников ( $h$  и  $p$  соответственно). Прежде всего очевидно, что  $f = h + p$ . И поскольку каждый шестиугольник имеет шесть ребер, каждый пятиугольник их имеет пять, а каждое ребро является общим для двух сторон, то находим, что  $a = (6h + 5p)/2$ . Для нахождения числа вершин  $s$  следует заметить, что каждая из них является общей для трех граней: соединить их большее число в вершине не представляется возможным, а принять  $s = 2$  – абсурдно. Каждый шестиугольник имеет шесть вершин, каждый пятиугольник – пять, а каждая вершина является общей для трех сторон; следовательно,  $s = (6h + 5p)/3$ . Подставляя найденные значения в формулу Эйлера, получим  $p = 12$ . Заметим, что существует многогранник с 12 пятиугольниками и совсем без шестиугольников – правильный додекаэдр, который соответствует молекуле  $C_{20}$ , самой маленькой в этом семействе. Что касается того, что все грани или шести-, или пятиугольные, это неудивительно: к примеру, квадратная грань требовала бы, чтобы две связи C–C образовывали между собой прямой угол, в то время как внешние электроны, как правило, распределяются в пространстве вокруг атомов симметрично.

Молекулы, которые мы только что описали, называются фуллеренами – в честь американского архитектора Бакминстера Фуллера, создателя геодезических куполов, напоминающих молекулу  $C_{60}$ . Она была обнаружена первой; ее еще называют *footballen* из-за сходства с футбольным мячом. По сей день физики находят и исследуют потрясающе красивые структу-



Рис. 7. Усеченный икосаэдр, изученный Пьеро делла Франческа и нарисованный Леонардо да Винчи для книги Луки Пачоли

ры, созданные природой и обычно скрытые от нас, а ведь некоторые художники их предсказали! Известный тосканский художник Пьеро делла Франческа (умерший в возрасте почти 80 лет в 1492 году), вероятно, был первым, кто изобразил футбольный мяч – или, вернее, усеченный икосаэдр, полученный в результате усечения обычного икосаэдра по пяти плоскостям. Пьеро делла Франческа увлекался математикой, но рисунок усеченного икосаэдра был обнаружен не в его «Книжице о пяти правильных телах», а в труде, опубликованном в 1510 году одним из его учеников, Лукой Пачоли. Иллюстратором книги, озаглавленной «Божественная пропорция», был... Леонардо да Винчи (рис. 7).

### Углеродные нанотрубки

Углерод также способен скручиваться, формируя трубки. Они бывают самых разных форм и размеров, диаметром от

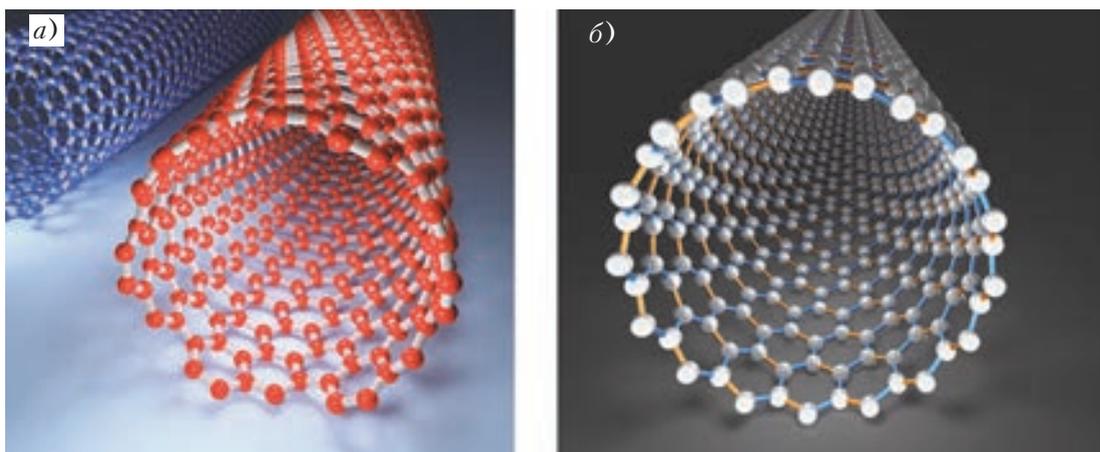


Рис. 8. Две разновидности углеродных нанотрубок. а) Конструкция «кресла» имеет связи, перпендикулярные оси трубки. б) «Зигзагообразная» структура обладает связями, параллельными оси трубки

одного до нескольких десятков нанометров (рис.8). Углеродные нанотрубки создают в лабораториях различными способами: отрывая кусочки от углеродного блока при помощи лазера или электрической дуги или же путем осаждения подходящего углеродного пара. На самом деле мы, сами того не зная, производили их на протяжении веков, но только с появлением усовершенствованных инструментов сумели обнаружить эти нанообъекты.

Нанотрубки, фуллерены и другие производные графена обладают электрическими и оптическими свойствами, которые будоражат умы физиков и в перспективе могут найти уникальные применения, скажем в фотоэлементах. Графеновая элект-

роника также обещает продлить действие закона Мура, позволив создавать транзисторы еще меньшего размера, чем используемые сегодня кремниевые.

Нанотрубки имеют еще и замечательные механические свойства: они чрезвычайно устойчивы к растяжениям. Поэтому вскоре мы сможем увидеть легкие и прочные велосипеды и теннисные ракетки, созданные из композитных материалов, армированных углеродными нанотрубками диаметром в несколько микрон. Еще одна метаморфоза этого «особого элемента», воспетого Примо Леви!

Статья представляет собой главу из книги «Физика повседневности», выпущенной издательством «Альпина нон-фикшн» в 2020 году.

### Внимание наших читателей

Начиная с 2017 года журнал «Квант» стал ежемесячным и в год выходит 12 номеров журнала.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

# Чувствительность булевых функций

А. РАЗБОРОВ

**В** ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССКАЖЕМ о красивой и важной задаче с вполне элементарной формулировкой, которая была предметом интенсивных исследований многих математиков (включая автора этой статьи) на протяжении нескольких десятилетий и при этом не поддавалась никаким усилиям. А дальше все произошло как в сказке: 1 июля 2019 года на сайте arXiv.org появилась шестистраничная работа [1] американского математика по имени Хао Хуан (Hao Huang) с полным решением проблемы совершенно неожиданным и удивительно простым способом. Начнем с азов.

**Булевы функции, раскраски гиперкуба и чувствительность.** Через  $\{0, 1\}^n$  мы будем обозначать множество всех двоичных слов длины  $n$ : например,  $\{0, 1\}^3$  состоит из восьми элементов (000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111). Булева функция от  $n$  переменных  $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  классифицирует слова  $x \in \{0, 1\}^n$  в «хорошие» (те, для которых  $f_n(x) = 1$ ) и «плохие» ( $f_n(x) = 0$ ). Нижний индекс всегда будет обозначать число переменных.

Булевы функции, как, впрочем, и любые другие, можно подставлять друг в друга; не менее важно то, что их можно подвергать логическим операциям, таким как И, ИЛИ, НЕ. Поэтому булевы функции являются одним из наиболее фундаментальных и часто встречающихся объектов в различных компьютерных науках (и теоретических, и прикладных) как способ

представления и преобразования дискретной информации.

Нас сегодня будут больше интересовать свойства булевых функций как комбинаторных объектов, а также иногда их аналитические<sup>1</sup> свойства; изучением последних занимается целая дисциплина, называемая «анализ булевых функций». Поэтому, чтобы подчеркнуть комбинаторную и геометрическую природу булевых функций, давайте по возможности вместо формул рассматривать картинки и графы.

Два слова  $x, y \in \{0, 1\}^n$  называются *соседними*, если они отличаются ровно в одной позиции  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Соединяя ребром все пары соседних вершин, получим граф  $Q_n$  на  $2^n$  вершинах. Эти графы (на рисунке 1 показаны графы  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$ ) называются

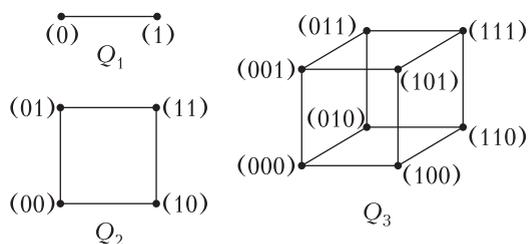


Рис. 1

*гиперкубами*, и они очень важны в комбинаторике по многим разным причинам. Тем самым булевы функции  $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  превращаются в раскраски множества вершин  $V(Q_n)$   $n$ -мерного гиперкуба в два цвета: зеленый ( $f_n(x) = 1$ ) и красный

<sup>1</sup> Здесь стоит напомнить, что 1 и 0 могут рассматриваться не только как логические константы ИСТИНА и ЛОЖЬ, но и просто как вещественные числа.

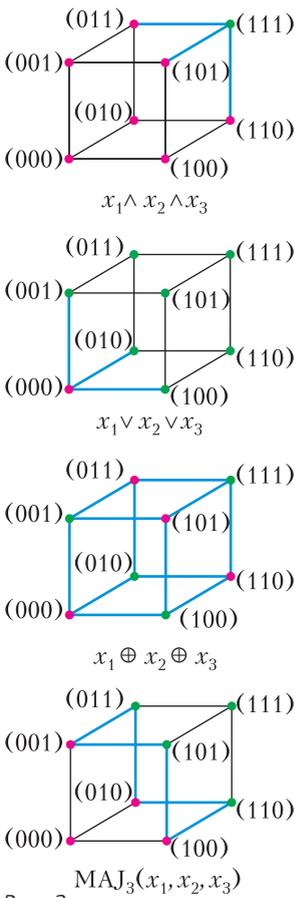


Рис. 2

( $f_n(x) = 0$ ). На рисунке 2 показаны булевы функции, соответствующие наиболее базисным операциям: И, ИЛИ, сложение по модулю 2 (XOR) и функция голосования (MAJ<sub>3</sub>; значение MAJ<sub>3</sub>( $x$ ) равно 1, если и только если слово  $x$  содержит хотя бы две единицы). На каждом рисунке также выделено синим цветом множество ребер графа  $Q_n$ , вершины которых покрашены в разные цвета. Это множество называется *разрезом* (данной функции), и оно является центральным для нашей статьи понятием.

**Упражнение 1.** Функция  $f_n$  существенно зависит от всех своих переменных, если она не может быть выражена как функция от меньшего числа переменных. На нашей картинке это означает, что в ее разрезе имеется хотя бы одно ребро в каждом из  $n$  возможных направлений. Функция  $f_n$  обобщенно симметрична, если ее картинку можно повернуть таким образом, что цвет вершины будет зависеть только от ее уровня, т.е. от количества единиц в соответствующем двоичном слове (рис.3).

Докажите, что всякая функция  $f_2$ , существенно зависящая от обеих своих переменных, является обобщенно-симметричной. А верно ли то же самое для функций от 3 и большего числа переменных?

Мы теперь готовы определить важную числовую характеристику булевой функции  $f_n$  – ее чувствительность  $s(f_n)$ . Начнем с чувствительности  $s(f_n, x)$  функции  $f_n$  в данной вершине  $x \in V(Q_n)$ : по определе-

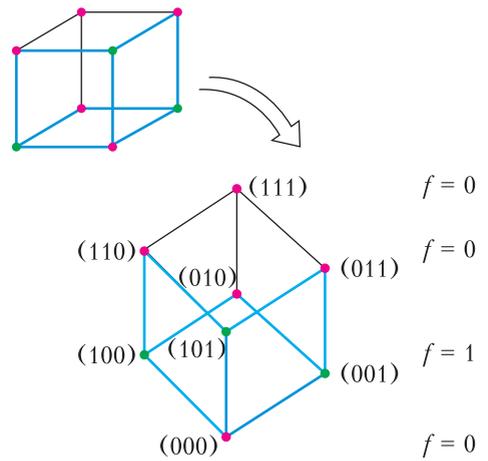


Рис. 3

нию, она просто равна числу ребер в разрезе  $\text{Cut}(f_n)$ , выходящих из  $x$ . Это одна из нескольких естественных возможностей измерять, насколько именно функция в точке  $x$  чувствительна к малым (в данном случае – ровно в одной координате) изменениям во входных данных. Чувствительность функции  $f_n$  определяется как максимально возможное значение  $s(f_n, x)$ :

$$s(f_n) = \max_{x \in V(Q_n)} s(f_n, x). \quad (1)$$

Таким образом (для знакомых с терминологией теории графов),  $s(f_n)$  – это не что иное, как максимальная степень (вершины) графа с множеством ребер  $\text{Cut}(f_n)$ .

**Упражнения**

2. Вычислите  $s(f_3)$  для всех функций на рисунке 1.
3. Докажите, что при  $n \geq 2$  для любой функции  $f_n$ , существенно зависящей от всех своих переменных, имеет место  $s(f_n) \geq 2$ .

Для больших  $n$  имеет место оценка

$$s(f_n) \geq \frac{1}{2} \log_2 n - \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + \frac{1}{2}, \quad (2)$$

где, как и в упражнении 3, функция  $f_n$  существенно зависит от всех своих переменных. Эта оценка, доказанная Х.У.Симоном (H.U.Simon) в 1983 году, по-видимому, является первым нетривиальным результатом в исследовании чувствительности булевых функций. На первый взгляд она может показаться чрезмерно грубой, но на самом деле оценка довольно точна.

**Упражнение 4.** Для всех  $h \geq 1$  постройте пример функции  $f_{h+2^h}$ , существенно зависящей от  $h + 2^h$  переменных  $s(f_{h+2^h}) = h + 1$ .

**Блочная чувствительность.** Понятие чувствительности очень простое и естественное, но оказывается, что большую пользу в различных приложениях принесят его модификации.

Так, например, в формуле (1) вместо взятия максимума по всем  $x \in V(Q_n)$  можно взять среднее значение. Получится *средняя чувствительность*  $as(f_n)$  функции  $f_n$ , которая, как легко понять, является не чем иным, как размером разреза  $|Cut(f_n)|$ , нормированным подходящим (вычислите его!) множителем. Это понятие играет центральную роль в анализе булевых функций.

Нас сегодня, однако, больше интересует другая модификация:  $bs(f_n)$ , называемая *блочной чувствительностью*. Как и раньше, начнем со случая, когда у нас есть функция  $f_n$  и входное слово  $x \in \{0, 1\}^n$ . Тогда *чувствительным блоком* называется подмножество  $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  такое, что  $f(x^B) \neq f(x)$ , где  $x^B$  – результат изменения слова  $x$  одновременно во всех позициях  $i \in B$ . Например, функция  $MAJ_3$  на рисунке 1 в точке (000) имеет четыре чувствительных блока, а именно, те подмножества  $B \subseteq \{1, 2, 3\}$ , для которых  $|B| \geq 2$ . *Блочной чувствительностью*  $bs(f_n, x)$  функции  $f_n$  на входе<sup>2</sup>  $x$  называется максимальное значение  $l$ , для которого существуют  $l$  **попарно непересекающихся** чувствительных блоков. Таким образом,  $bs(MAJ_3, 000) = 1$  просто потому, что любые два чувствительных блока имеют непустое пересечение. И, наконец, как и раньше, полагаем

$$bs(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in V(Q_n)} bs(f_n, x).$$

**Упражнение 5.** Вычислите  $bs(f_3)$  для всех функций на рисунке 1.

Ниже мы объясним, почему блочная чувствительность важна и интересна, но

<sup>2</sup> Термин «вход» будет иногда использоваться в дальнейшем в качестве сокращения для «входное слово  $x \in \{0, 1\}^n$ ».

вначале давайте сравним ее с обыкновенной, а также сформулируем гипотезу (уже доказанную), которая послужила поводом для написания этой статьи.

Прежде всего, обыкновенная чувствительность, очевидно, соответствует ограничению, состоящему в том, что все чувствительные блоки имеют размер 1. Поэтому  $s(f_n, x) \leq bs(f_n, x)$  и, соответственно,  $s(f_n) \leq bs(f_n)$ .

**Упражнения**

**6.** Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Докажем, что  $s(f_n)$  всегда равно  $bs(f_n)$ . Пусть  $bs(f_n) = s$ . Рассмотрим соответствующий вход  $x$  и систему из  $s$  чувствительных блоков на этом входе. Так как ограничение нашей функции на любой блок нетривиально, в каждом блоке существует некоторый вход, на котором функция чувствительна по крайней мере в одной позиции. Так как блоки попарно не пересекаются, эти входы можно между собой соединить и получить вход для исходной функции, чувствительный по крайней мере к  $s$  переменным, по одной в каждом блоке. Следовательно,  $s(f_n) \geq s$ .

**7\*.** Постройте функцию  $f_4$ , у которой  $s(f_4) = 2$  и  $bs(f_4) = 3$ .

Насколько большим может быть разрыв между  $s(f_n)$  и  $bs(f_n)$ ? Первый общий пример в этом направлении принадлежит Рубинштейну (Rubinstein, 1995). Соответствующую функцию  $R_n$  от  $n = m^2$  переменных описать довольно легко, но лучше это делать не на картинке. Итак, у нас есть двоичное слово  $x$  длины  $m^2$ . Первым делом разобьем его на  $m$  блоков по  $m$  знаков в каждом блоке. Назовем блок *хорошим*, если он содержит ровно две единицы, причем эти единицы следуют друг за другом. Раскрасим  $x$  в зеленый цвет, если в нем найдется хотя бы один хороший блок, и в красный, если такого нет.

**Упражнение 8.** Докажите, что  $s(R_{m^2}) = m$ , а  $bs(R_{m^2}) = m^2/2$ .

Итак, разрыв между чувствительностью и блочной чувствительностью может выражаться квадратичной функцией, и попытки его увеличить оставались совершенно безуспешными в течение долгого времени. Улучшить мультипликативную константу в примере Рубинштейна удалось лишь совсем недавно, но функция при этом так

и осталась квадратичной. Все это побудило Нисан и Сегеди (Nisan и Szegedy) сформулировать в 1994 году следующую гипотезу, быстро завоевавшую широкую известность.

**Гипотеза о блочной чувствительности.**

Существуют такие абсолютные константы  $\epsilon, \delta > 0$ , что для любой булевой функции  $f_n$  имеет место  $s(f_n) \geq \delta \cdot \text{bs}(f_n)^\epsilon$ .

Если эту гипотезу сформулировать словами, то в ней утверждается, что функции  $s(f_n)$  и  $\text{bs}(f_n)$  совпадают «с точностью до некоторого полинома (многочлена)». Такой уровень точности, в особенности когда полиномиальные функции противопоставляются экспоненциальным, является типичным для современной теории сложности; более подробно об этом можно прочитать в популярном очерке [2].

Достигнутый в течение 25 лет прогресс в доказательстве этого утверждения (или построении к нему контрпримера) преимущественно сводился к нахождению новых гипотез или фактов, напрямую с ним связанных. Приятным исключением является работа Кеньон и Кутина (Kenyon и Kutin) 2004 года, в которой гипотеза о блочной чувствительности доказана в предположении, что все чувствительные блоки имеют ограниченный (например,  $\leq 10$ ) размер. Мы отсылаем заинтересованного читателя к обзору [3], а сами переходим непосредственно к доказанному Хуаном результату.

**Теорема 1** ([1]). *Для всякой булевой функции  $f_n$  имеем  $s(f_n) \geq \text{bs}(f_n)^{1/4}$ .*

Прежде чем рассказывать об идеях доказательства, давайте выполним данное выше обещание и поговорим о том, почему именно блочная чувствительность важна и интересна. Оказывается, что она «с точностью до полинома» эквивалентна целому ряду других важных характеристик булевых функций. Более того, если читать соответствующие доказательства (до чего мы, к сожалению, не дойдем), то видно, что блочная чувствительность занимает в них центральное место. Мы рассмотрим три такие характеристики, имеющие раз-

личную природу: комбинаторную, вычислительную и аналитическую.

**Сертификационная сложность.** Как всегда, начнем с рассмотрения индивидуального входа  $x \in \{0, 1\}^n$ . Множество позиций  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  называется *сертифицирующим* (для данного  $x$ ), если набор значений  $(x_i | i \in I)$  (называемый *сертификатом*) полностью определяет  $f_n(x)$ . Иными словами, для любого другого  $y \in \{0, 1\}^n$ , совпадающего с  $x$  во всех позициях из  $I$ , имеет место  $f_n(y) = f_n(x)$ . Сертификаты далеко не единственны, и *сертификационной сложностью*  $C(f_n, x)$  называется **минимальный** (обратите внимание на отличие от определений чувствительности, в которых берется максимум) возможный размер  $|I|$  сертификата  $I$ . После этого, как и раньше,

$$C(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \{0, 1\}^n} C(f_n, x).$$

То же самое понятие легко объяснить геометрически. Рассмотрим семейство подкубов в  $Q_n$ , имеющих коразмерность  $d$  (т.е. содержащих ровно  $2^{n-d}$  вершин). Среди них нас интересуют *монохроматические* подкубы, т.е. такие, у которых все вершины покрашены в один и тот же цвет.

**Упражнение 9.** Докажите, что  $C(f_n)$  равно минимальному  $d$ , для которого монохроматические подкубы коразмерности  $d$  полностью покрывают  $\{0, 1\}^n$ .

Легко понять, что  $\text{bs}(f_n, x) \leq C(f_n, x)$  и, следовательно,  $\text{bs}(f_n) \leq C(f_n)$ . Действительно, выберем произвольный сертификат  $I$  с  $|I| = C(f_n, x)$ . Тогда всякий чувствительный блок  $B$  на входе  $x$  обязан содержать хотя бы один  $i \in I$ . Поэтому всякое **дизъюнктное** семейство чувствительных блоков (т.е. такое, что никакие два его блока не пересекаются) может содержать не более  $|I|$  членов.

В другую сторону это намного менее очевидно.

**Теорема 2** (Нисан, Сегеди, 1994). *Для всякой булевой функции  $f_n$  имеем  $C(f_n) \leq \text{bs}(f_n)^2$ .*

Таким образом,  $\text{bs}(f_n)$  и  $C(f_n)$  «эквивалентны с точностью до полинома», и при желании в теореме 1 можно заменить блоч-

ную чувствительность на сертификационную сложность. От этого ее содержание (за исключением, возможно, константы в экспоненте) не изменится. Отметим также, что в геометрическом определении  $S(f_n)$  можно дополнительно потребовать, чтобы искомое покрытие было на самом деле **разбиением**, т.е. все участвующие в покрытии подкубы попарно не пересекаются. Полученная величина все еще будет полиномиально эквивалентна  $bs(f_n)$  и  $S(f_n)$ ; почему это так, станет понятным в следующем разделе.

**Разрешающие деревья.** До сих пор мы в основном занимались комбинаторными и к тому же локальными (т.е. определяемыми в терминах некоторой «окрестности» фиксированной вершины  $x \in \{0, 1\}^n$ ) свойствами булевых функций. В этом разделе мы покажем, как все это соотносится с теорией *вычислительной* сложности.

Разрешающие деревья (decision trees) – это, пожалуй, наиболее простая, но в то же время наиболее часто используемая в приложениях вычислительная модель. Многие, вероятно, знают игру в 20 вопросов, в которой требуется угадать неизвестный предмет, задавая про него вопросы, на которые допускаются лишь ответы ДА/НЕТ. Любую мыслимую стратегию для этой игры можно представить в виде *разрешающего дерева* (рис.4). Его *высотой* называется *максимальная* возможная длина пути в этом дереве. Таким образом, высота дерева определяется числом вопросов, задаваемых в наиболее неблагоприятном (наихудшем) для нас случае. Напри-

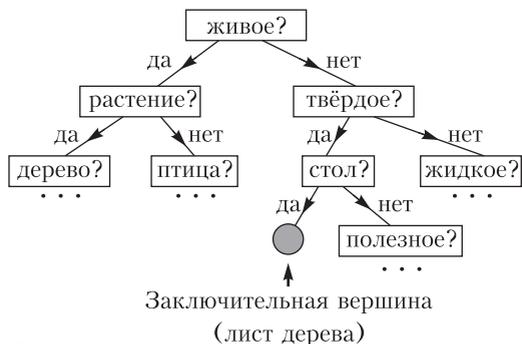


Рис. 4

мер, если на рисунке 4 нам повезло и был загадан именно стол, то все равно высота дерева будет измеряться подсчетом длины вдоль других ветвей этого дерева.

Читателю предлагается обдумать следующий довольно нехитрый тезис: игру в 20 вопросов можно *заведомо* выиграть тогда и только тогда, когда для нее существует разрешающее дерево, имеющее высоту  $\leq 20$ .

Как мы уже отмечали, разрешающие деревья в той или иной форме используются везде, и во многих приложениях достаточно рассматривать вычисление с их помощью булевых функций  $f_n$ . Чтобы разобраться в том, что это такое, давайте слегка модифицируем правила игры: предположим, что вместо предмета у нас загадано двоичное слово  $x \in \{0, 1\}^n$ . Тогда если ставится задача угадать  $x$  полностью, то легко понять, что никакое разрешающее дерево для решения этой задачи не может иметь высоту  $\leq n - 1$ .

**Упражнение 10.** Докажите это утверждение.

Предположим, однако, что все слово  $x$  нас не интересует, а интересует некоторое его свойство, задаваемое булевой функцией  $f_n(x)$ . В такой постановке задача не слишком интересна, потому что про загаданное свойство можно просто спросить. Однако в рассматриваемой нами модели мы разрешаем угадывающему задавать только очень простые вопросы, а именно выяснять значение индивидуального бита  $x_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) в слове  $x$ . Пример такого разрешающего дерева приведен на рисунке 5; требуется, чтобы информации, полученной угадывающим вдоль каждой ветви, было достаточно для определения зна-

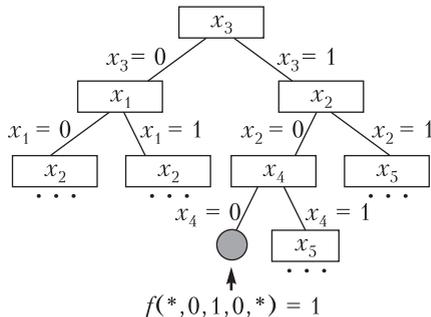


Рис. 5

чения  $f_n(x)$  независимо от тех значений, про которые не спрашивали. Сложность  $D(f_n)$  булевой функции  $f_n$  по отношению к разрешающим деревьям (query complexity) определяется как минимально возможная высота разрешающего дерева, вычисляющего нашу функцию. Иными словами, это наименьшее число простых вопросов про вход  $x \in \{0, 1\}^n$ , которых **заведомо** достаточно для вычисления значения  $f_n(x)$ .

### Упражнения

11. Определите  $D(f_3)$  для всех функций, изображенных на рисунке 2.

12. Докажите, что  $D(f_n) = D(\neg f_n)$ , где  $\neg f_n$  – отрицание функции  $f_n$ .

13. Докажите, что  $D(f_n) = D(f_n(\neg x_1, \dots, \neg x_n))$ .

14. Докажите, что  $D(f_n \vee g_n) \leq D(f_n) + D(g_n)$ . Может ли это неравенство быть строгим?

Теперь давайте свяжем все это с предыдущими рассуждениями. Как всегда, в одну сторону это просто. Если имеется разрешающее дерево, то каждой заключительной вершине соответствует сертификат, состоящий из ответов на все вопросы, которые угадывающий спросил про  $x$  по дороге в эту вершину. На рисунке 5 этот сертификат выписан явно для одной (закрашенной) вершины. Размер этого сертификата не превосходит высоты дерева, и более того, каждый вход  $x$  обладает ровно одним таким сертификатом. Таким образом,  $C(f_n) \leq D(f_n)$  и, более того (сравните с замечанием в конце предыдущего раздела), построенная нами система подкубов является *разбиением*  $\{0, 1\}^n$ .

В обратную сторону это намного менее очевидно.

**Теорема 3** (Билз и др., 2001). Для всякой булевой функции  $f_n$  имеем  $D(f_n) \leq C(f_n) \text{bs}(f_n)$  (что  $\leq \text{bs}(f_n)^3$  ввиду теоремы 2).

Доказательство этой теоремы выходит за рамки этой статьи, но она позволяет добавить разрешающие деревья к списку мер сложности, полиномиально эквивалентных блочной чувствительности. Отметим лишь одно ее замечательное свойство: величины  $C(f_n)$ ,  $\text{bs}(f_n)$  в правой части имеют сугубо

комбинаторную (или геометрическую, если угодно) природу. В то же время разрешающие деревья – это концепция алгоритмическая. Таким образом, теорема 3 утверждает существование алгоритма, качество работы которого целиком определяется комбинаторными свойствами функции, к которой он применяется.

**Булевы функции и полиномы.** В этом разделе мы рассматриваем 0 и 1 просто как вещественные числа, совершенно абстрагируясь от их логического смысла. Кроме того, нас будет интересовать слегка более общая ситуация  $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , т.е. областью определения функции  $f_n$  все еще служат вершины гиперкуба, но значениями могут быть уже произвольные вещественные числа.

Мы хотим представить функции  $f_n$  максимально простым выражением, причем под «представлением» мы имеем в виду, что значение нашего выражения должно совпадать с  $f_n$  там, где эта функция определена (т.е. при  $x \in \{0, 1\}^n$ ), и может вести себя произвольно на всех остальных.

Самые простые и важные аналитические выражения – это полиномы (многочлены) от нескольких переменных, и оказывается, что в самом деле любая функция  $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$  допускает полиномиальное представление. Более того, в таком представлении нет нужды в высших ( $\geq 2$ ) степенях одной и той же переменной: так как  $x_i \in \{0, 1\}$ , то  $x_i^d$  при  $d \geq 2$  всегда можно упростить до  $x_i$ . Иными словами, достаточно ограничиться *мультилинейными полиномами*, т.е. такими, у которых степень по каждой переменной не превосходит 1 (и, следовательно, суммарная степень не превосходит  $n$ ).

**Упражнение 15.** Докажите это утверждение.

*Указание.* Напишите явную формулу, связывающую  $f_n(x_1, \dots, x_n)$  с  $f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$  и  $f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ .

Оказывается, что такое представление к тому же и единственно. Таким образом, всякую функцию  $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (и, в частности, всякую булеву функцию) можно отождествить с ее мультилинейным полиномиальным представлением.

**Упражнение 16.** Представьте в виде мультилинейных полиномов все функции на рисунке 2.

Таким образом, с каждой булевой функцией  $f_n$  можно связать еще одну меру сложности, на этот раз алгебраическую, а именно степень  $\deg(f_n)$  представляющего ее мультилинейного полинома. Отметим ее важное отличие от всех ранее рассмотренных мер. А именно, до сих пор в наши определения входили разнообразные минимумы и максимумы, что на практике ведет к тому, что вычислить их, или даже приблизить разумным образом, может быть непросто. Напротив, степень  $\deg(f_n)$  соответствует *единственному* представлению функции  $f_n$ , и, как следствие, ее можно вычислить явно в большинстве интересных ситуаций, просто выписав представляющий полином.

Видимо, читатель уже догадался, к чему мы ведем: степень  $\deg(f_n)$  оказывается эквивалентной всем ранее рассмотренным мерам. Доказать неравенство в одну сторону довольно легко.

**Упражнение 17.** Докажите, что  $\deg(f_n) \leq D(f_n)$ .

В другую сторону дело представляется довольно затруднительным: все, что у нас есть – это мультилинейный полином малой степени и заверения в том, что если мы в него подставим 0 или 1, то в результате снова получится 0 или 1. Нам же надо каким-то образом из этого установить, что полученная таким образом булева функция имеет вполне определенную и притом довольно жесткую структуру. На помощь приходит блочная чувствительность: доказывается, что

$$\deg(f_n) \geq \frac{1}{3} \sqrt{\text{bs}(f_n)}. \quad (3)$$

Доказательство весьма нетривиально и использует глубокий факт из теории полиномиальной аппроксимации. Грубо говоря, основная идея состоит в том, что  $\text{bs}(f_n) \geq s$  – это утверждение *позитивное*, именно этим блочная чувствительность и удобна. Оно означает *существование* входа  $x$  и блоков  $B_1, \dots, B_s$  с определенными свойствами. Показывается, что наличие таких  $x, B_1, \dots, B_s$  несовместимо с наличием полиномиально-го представления малой степени.

В заключение этого раздела отметим, что другой важной характеристикой булевой функции, в особенности при рассмотрении вероятностных и квантовых алгоритмов, является ее *приближенная степень*  $\widetilde{\deg}(f_n)$ . Она определяется как минимальная возможная степень мультилинейного полинома  $p_n(x_1, \dots, x_n)$ , для которого  $|p_n(x_1, \dots, x_n) - f_n(x_1, \dots, x_n)| \leq 1/3$  для всех  $x \in \{0, 1\}^n$  (точное значение константы  $1/3$  здесь большой роли не играет, важно лишь, что она меньше  $1/2$ ). В этом определении уже присутствует минимум, поэтому приближенная степень – намного более сложная величина, чем обыкновенная. Скажем, даже для простой функции на рисунке 6 до-

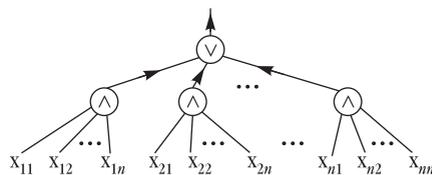


Рис. 6

казательство того, что ее приближенная степень **линейна** по  $n$ , потребовало многих лет работы и было получено сравнительно недавно специально разработанным для этой цели методом (Бун, Талер (Bun, Thaler), 2013; Шерстов, 2014).

Однако если мы работаем «с точностью до полинома», то приближенная степень пополняет нашу коллекцию мер, полиномиально эквивалентных блочной чувствительности. Неравенство  $\widetilde{\deg}(f_n) \leq \deg(f_n)$  очевидно, а метод, используемый для доказательства нижней оценки (3) на степень, с тем же успехом работает и для приближенной степени.

Мы познакомились с некоторыми базовыми мерами сложности булевых функций. Несмотря на то, что они имеют совсем разную природу, все они эквивалентны друг другу в некотором разумном смысле, кроме (до 2019 года!) обыкновенной чувствительности. Осталось сказать несколько слов о доказательстве Хуана, лишаящем обыкновенную чувствительность ее особого статуса.

### Блочная чувствительность полиномиально эквивалентна чувствительности.

Доказательство из [1] существенно опирается на предыдущую работу Готсмана и Линиала (1997), в которой предложена еще одна характеристика блочной чувствительности, и мы начнем с этой работы, тем более что эта часть почти элементарна.

Отправной точкой для нас служит булева функция  $f_n$  с  $\deg(f_n) = d$ , а в конце будет показано, что  $s(f_n) \geq d^{1/2}$ .

Первое наблюдение состоит в том, что без ограничения общности можно считать  $d = n$ . Для этого достаточно в представляющем  $f_n$  полиноме выделить произвольный член старшей степени, скажем  $\alpha x_1 x_2 \dots x_d$  (где  $\alpha \neq 0$ ). Подставим вместо оставшихся переменных  $x_{d+1}, \dots, x_n$  произвольные 0–1 значения (например, нули). Легко понять, что от такой операции степень полинома уменьшиться не может, просто потому что член  $\alpha x_1 \dots x_d$  мы не трогаем и сокращаться ему будет не с кем. С другой стороны, чувствительность (как, впрочем, и все остальные рассмотренные в этой статье меры) от такой подстановки может только уменьшиться.

**Упражнение 18.** Докажите это утверждение.

Итак, предположим, что старший член  $x_1 x_2 \dots x_n$  присутствует в  $f_n$  с ненулевым коэффициентом  $\alpha$ . Оказывается, что  $\alpha$  имеет очень полезное комбинаторное описание. Развернем наш гиперкуб, чтобы на каждом горизонтальном уровне оказались входы с одинаковым количеством единиц, и поменяем цвет вершин с красного на зеленый и наоборот, но **только на нечетных уровнях** (рис.7).

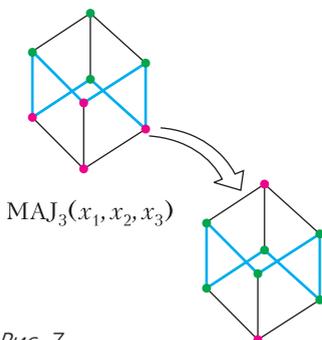


Рис. 7

Что произойдет от такой операции? Во-первых, разрез  $\text{Cut}(f_n)$  превратится в множество монохроматических ребер, т.е. таких, у которых оба конца покрашены в *один* цвет. Тем самым, если мы рассмотрим подграфы  $G_n, R_n$ , индуцированные зелеными и красными (в новой раскраске!) вершинами соответственно, то  $s(f_n)$  станет не чем иным, как  $\max(\Delta(G_n), \Delta(R_n))$ , где  $\Delta(G)$  – максимальная степень вершины в графе  $G$ .

Оказывается, что коэффициент  $\alpha$  просто измеряет «несбалансированность» нашей новой раскраски. Более точно, если  $g_n = |V(G_n)|$  и  $r_n = |V(R_n)|$  – количества «новых» зеленых и красных вершин, то имеет место соотношение

$$g_n - r_n = \alpha \cdot 2^n.$$

Для нас единственно важно, что  $g_n \neq r_n$ , т.е. что одно из этих чисел (скажем,  $g_n$ ) **строго** больше  $2^{n-1}$ .

Таким образом, нам «всего лишь» осталось показать, что для произвольного подмножества  $V_n \subseteq \{0, 1\}^n$  с  $|V_n| > 2^{n-1}$  в индуцированном этим подмножеством графе  $H_n$  есть вершина степени  $\geq n^{1/2}$ .

**Упражнение 19.** Покажите, что это утверждение станет неверным, если неравенство  $|V_n| > 2^{n-1}$  заменить на нестрогое.

Это и есть сведение Готсмана–Линиала. Для полноты картины отметим, что оно работает в обе стороны, и если в выделенном курсивом утверждении заменить  $n^{1/2}$  на  $n^\epsilon$  для произвольной константы  $\epsilon$ , то получится еще одна переформулировка гипотезы о блочной чувствительности.

Итак, нижняя оценка на максимальную степень  $H_n$  и есть то, что доказывает Хуан. Доказательство несложно для понимания, но использует некоторые элементарные (на уровне первого курса любого математического факультета) факты из линейной алгебры. Строго их формулировать, а тем более доказывать, у нас возможности нет, но некоторое представление, о чем идет речь, мы дать можем.

*Матрицей* называется квадратная таблица  $A$  размера  $N \times N$ , состоящая из чисел  $a_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$ ). Матрица  $A$  называется *симметричной*, если  $a_{i,j} = a_{j,i}$  для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 5$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Рис. 8

всех  $i, j$ . На картинке это означает, что матрица не изменится при отражении относительно *главной диагонали*, идущей из левого верхнего в правый нижний угол (рис.8). В оставшейся части статьи нас будут интересовать исключительно симметрические матрицы.

*Вектор размерности  $N$*  – это столбец  $X$  высоты  $N$ , также состоящий из чисел  $x_j$  ( $1 \leq j \leq N$ ). Матрицу  $A$  размера  $N \times N$  всегда можно умножить на вектор той же размерности  $N$ ; получится новый вектор, который обозначается через  $AX$ . В  $i$ -й позиции этого вектора помещается значение суммы  $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,N}x_N$ ; пример такого вычисления приведен на рисунке 8.

Этот пример интересен еще и потому, что вектор  $AX$  оказывается *гомотетичен* исходному вектору  $X$ , т.е. существует такое число  $\lambda$ , что  $(AX)_i = \lambda x_i$  для всех  $1 \leq i \leq N$ , или, в векторных обозначениях,  $AX = \lambda X$ . Векторы, обладающие этим замечательным свойством, называются *собственными* (для матрицы  $A$ ), а «коэффициент гомотетии»<sup>3</sup>  $\lambda$  – *собственным значением*, соответствующим собственному вектору  $X$ . У каждой матрицы есть тривиальный собственный вектор, а именно, состоящий из одних нулей *нулевой вектор*, но на первый взгляд непонятно, почему у  $A$  непременно должны быть какие-то другие.

На самом деле у произвольной (т.е. не обязательно симметрической) матрицы их

вполне может и не оказаться, и для полного понимания картины необходимо привлекать комплексные числа. Но для симметрических матриц все существенно проще: всякая такая матрица обладает полным набором  $X^1, \dots, X^N$  **линейно независимых** (см. следующий абзац) собственных векторов. Так, например, наша матрица  $A$  на рисунке 8, помимо уже известного нам собственного вектора  $X = X^1$  обладает еще двумя,  $X^2$  и  $X^3$ . Тем самым у нас также появляется набор собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , соответствующих этим собственным векторам, причем (все это надо доказывать, конечно) с точностью до перестановки этот набор зависит только от матрицы  $A$  и называется ее *спектром*. В нашем примере спектр матрицы состоит из чисел  $(5, -1, -1)$ ; обратите внимание, что в нем появляются не только отрицательные числа, но и кратные значения, т.е. одному и тому же собственному значению могут соответствовать несколько (линейно независимых!) собственных векторов.

В заключение нашего краткого экскурса в линейную алгебру скажем, как мы уже обещали, несколько слов про теорию размерности. Векторы  $X^1, \dots, X^M$  размерности  $N$  называются *линейно независимыми*, если не существует никакой нетривиальной (т.е. такой, в которой хотя бы одно из  $\alpha_i$  отлично от 0) линейной комбинации  $\alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_M X^M$ , равной нулевому вектору. Число линейно независимых векторов  $M$  в такой системе не превосходит размерности  $N$ , и в случае  $M = N$  система линейно независимых векторов называется *базисом*. Базисы можно также охарактеризовать в противоположных (или, как часто говорят математики, *двойственных*) терминах. Именно, система  $X^1, \dots, X^N$   $N$ -мерных векторов является базисом тогда и только тогда, когда любой другой  $N$ -мерный вектор  $Y$  можно выразить в виде линейной комбинации  $\alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_N X^N$ .

**Упражнения**

**20.** Докажите, что если  $X^1, \dots, X^N$  – базис, то всякий  $N$ -мерный вектор обладает **единственным** представлением вида  $\alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_N X^N$ .

<sup>3</sup> Коэффициент  $\lambda$  вполне может быть нулевым или отрицательным!

21. Проверьте, что векторы  $X^1, X^2, X^3$  на рисунке 8 образуют базис.

Вернемся к доказательству выделенного курсивом утверждения перед упражнением 19. В качестве первого шага Хуан конструирует специальную симметрическую матрицу  $A_n$  размера  $N \times N$ , где  $N = 2^n$ , строки и столбцы которой занумерованы **всеми** вершинами гиперкуба  $x, y$  (а не только элементами  $V_n$ ). Все элементы в этой матрице равны 0, 1 или  $-1$ , причем  $A_n(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  не соединены ребром (в частности,  $A_n(x, x) = 0$  на диагонали).

Если бы вхождений  $-1$  в матрице  $A_n$  не было вообще, то она называлась бы *матрицей смежности* (гиперкуба); это очень важный объект в теории графов. Ее спектр хорошо известен, но он не тот, что нам нужен. Путем замены 1 на  $-1$  в правильным образом выбранных местах удастся добиться того, что спектр будет состоять ровно из  $N/2$  значений  $n^{1/2}$  и  $N/2$  значений  $-n^{1/2}$ .

Далее, множество вершин  $V_n$  определяет симметрическую подматрицу  $B_n$  в  $A_n$ . Эта подматрица имеет большой размер, и мы хотим вывести отсюда какое-нибудь нетривиальное заключение про ее спектр. Слегка упрощая доказательство Хуана, рассмотрим систему, состоящую из  $N/2$  линейно независимых собственных векторов  $X^1, \dots, X^{N/2}$  матрицы  $A_n$ , соответствующих собственному значению  $n^{1/2}$ , а также векторов  $Y^v$ , для каждого  $v \in V_n$ , в которых в  $v$ -й позиции стоит 1, а все остальные позиции заполнены нулями. Векторов в этой системе строго больше, чем  $N$ , поэтому базисом она быть не может. Следовательно, существует нетривиальное равенство вида  $\alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_{N/2} X^{N/2} + \sum_{v \in V_n} \beta_v Y^v = 0$ ; легко понять (проверьте!), что тогда  $\sum_{v \in V_n} \beta_v Y^v$

будет нетривиальным собственным вектором матрицы  $B_n$ , и ему все еще соответствует собственное значение  $n^{1/2}$ .

Наконец доказывается, что максимальная степень в графе  $H_n$  не меньше, чем любое собственное значение матрицы  $B_n$ . Если бы отрицательных вхождений  $-1$  в матрице  $B_n$  не было (т.е.  $B_n$  была бы просто матрицей смежности), то этот факт широко известен и не менее широко применяется в теории графов. Замена некоторых 1 на  $-1$  этому рассуждению только помогает, и это легко проверяется.

**Упражнение 22.** Пусть  $G$  – произвольный граф с множеством вершин  $\{1, 2, \dots, N\}$  и  $A$  – произвольная симметрическая матрица размера  $N \times N$  такая, что  $a_{i,j} = 0$ , если  $i$  и  $j$  не соединены ребром, и  $a_{i,j} = \pm 1$ , если соединены. Докажите, что всякое собственное значение  $\lambda$  матрицы  $A$  не превосходит максимальной степени  $\Delta(G)$  графа  $G$ .

Вот собственно и все.

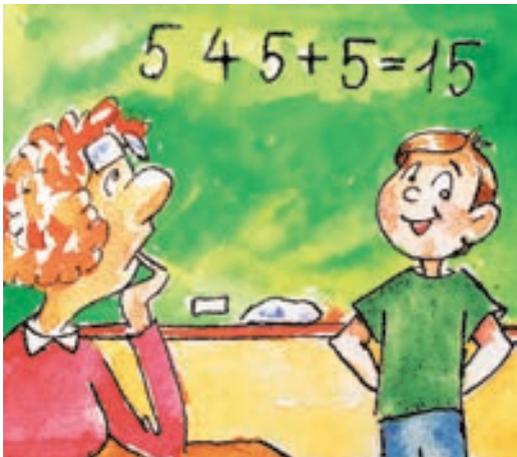
В заключение хочется отметить, что важные математические открытия происходят по-разному. Бывает, что решение требует построения глубоких и важных теорий, усилий нескольких поколений математиков и т.д. А бывает, как в нашем случае, что все, что для этого требуется, – это одна красивая и неожиданная идея. Прелесть математики (одна из многих) состоит в ее непредсказуемости: предугадать развитие событий заранее совершенно невозможно.

### Литература

1. *H. Huang*. Induced subgraphs of hypercubes and a proof of the sensitivity conjecture. – *Annals of Mathematics*, 190(3):949–955, 2019.
2. *А.А.Разборов*. Теория сложности. В книге: Математическая составляющая, 2-е изд. – М.: Математические этюды, 2019.
3. *P. Hatami, R. Kulkarni, and D. Pankratov*. Variations on the sensitivity conjecture. – *Theory of Computing Library, Graduate Surveys*, 4:1–27, 2011.

## Задачи

1. На доске школьник написал неверное равенство:



Сотрите одну черту, чтобы равенство стало верным.

2. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных четных чисел?



3. Каждая грань кубика разделена на 4 квадрата. Каждый квадрат окрашен в один из трех цветов — синий, желтый или

красный — так, что квадраты, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько может быть синих квадратов?



4. Имеется 100 карточек. Какие бы 50 из них ни взяли, среди них можно выбрать 30 таких, что какие бы 20 из них ни взяли, из них можно выбрать 10 таких, что какие бы 5 из них ни взяли, среди них окажется не менее 3 красных карточек. В то же время какие бы 80 карточек из 100 ни взяли, среди них можно выбрать 20 таких, что



Иллюстрации Д.Гришуковой

какие бы 10 из них ни взяли, среди них окажется не менее 2 синих карточек. Сколько красных и сколько синих карточек находится в колоде?

Автор этих задач — В.В.Произволов

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

## Задачи M2622–M2625, Ф2629–Ф2632

**M2622.** Точки  $E, F, G, H$  расположены на сторонах  $DA, AB, BC, CD$  ромба  $ABCD$  соответственно так, что отрезки  $EF$  и  $GH$  касаются вписанной в ромб окружности

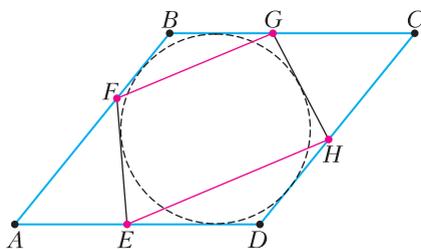


Рис. 1

(рис.1). Докажите, что  $FG \parallel HE$ .

*В.Айзенштадт*

**M2623.** В однокруговом футбольном турнире все команды набрали разное число очков. Если бы за победу давали не три, а два очка, то у всех команд тоже оказалось бы разное число очков, но занятое место у каждой команды было бы другим. При каком наименьшем числе команд это возможно?

*А.Заславский*

**M2624\*.** Даны  $n \geq 2$  натуральных чисел  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  таких, что  $a_n < 2a_1$ . Пусть количество различных простых делителей числа  $a_1 a_2 \dots a_n$  равно  $m$ . Докажите, что  $(a_1 a_2 \dots a_n)^{m-1} \geq (n!)^m$ .

*Д.Бурек (Польша)*

**M2625.** На клетчатой бумаге нарисована связанная клетчатая фигура  $\Phi$ . Известно,

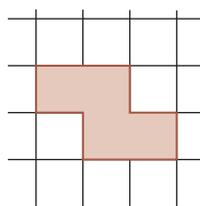


Рис. 2

что фигуру  $\Phi$  можно разрезать как на квадраты  $2 \times 2$ , так и на фигурки типа Z (рис.2) Докажите, что в фигуре  $\Phi$  есть дырка.

*Ю.Маркелов,  
А.Сайранов*

**Ф2629.** Легкая упругая пластина (консоль) длиной  $L$ , один из концов которой закреплен в стене, под действием груза массой  $m$  прогибается на величину  $h \ll L$  (рис.3). Без груза на свободном конце пластина горизонтальна. Какую работу

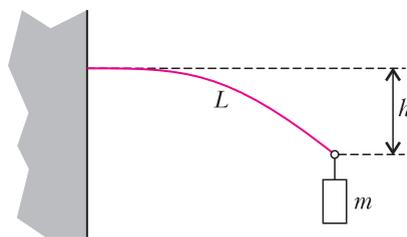


Рис. 3

нужно совершить, чтобы такую же пластину свернуть в кольцо?

*А.Власов*

**Ф2630.** Космонавты на МКС нашли в очередном «грузовике» тонкостенную цилиндрическую трубу массой  $m = 1$  кг, длиной  $L = 1$  м и внутренним сечением  $S = 10 \text{ см}^2$ . Оказалось, что внутренняя поверхность трубы замечательно смачивается водой, а внешняя совсем не смачивается. Из шприца внутрь трубы выдавили

воду. Делали это очень аккуратно, так что ни одного пузырька воздуха в трубе не оказалось. Труба с водой внутри долгое время в неподвижности «висела» посреди космической лаборатории, пока ее случайно не толкнули в направлении оси симметрии. Толчок был кратковременным,  $\Delta t < 10^{-3}$  с, и труба приобрела скорость  $v = 1$  см/с. В дальнейшем труба то останавливалась, то вновь двигалась с приобретенной при ударе скоростью. Через большое время скорость трубы с водой установилась и стала равной 0,5 см/с. Оцените период колебаний системы «вода-труба». Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma = 0,07$  Дж/м<sup>2</sup>. Вязкостью воды при расчете периода колебаний можно пренебречь.

Г.Агарин

**Ф2631.** Коллекторный двигатель постоянного тока, имеющийся в электродрели, при подаче на него напряжения 100 В вращается (на холостом ходу), делая в установившемся режиме 1000 оборотов в минуту. При сверлении отверстия в дереве двигатель производит механическую мощность 100 Вт на 700 оборотах в минуту при напряжении на нем 100 В. Какую максимальную механическую мощность сможет в течение длительного времени развивать такой двигатель, если на него подать напряжение 220 В?

Д.Релев

**Ф2632.** Для звукового усилителя используется блок питания с трансформатором. В нем есть двухполупериодный выпрямитель из четырех идеальных диодов. Первичная обмотка трансформатора включена в сеть (220 В, 50 Гц). На выходе вторичной обмотки эффективное напряжение равно  $U = 12$  В, оно подано на этот самый выпрямитель. Амперметр постоянного тока, включенный между выпрямителем и усилителем, показывает средний ток  $I = 1$  А. Усилитель работал, но противно гудел на частоте 100 Гц и ее гармониках, так как конденсатор, стоявший на выходе выпрямителя параллельно нагрузке, вышел из строя. В распоряжении Васи оказались два конденсатора емкостями

$C_1 = C_2 = 10^3$  мкФ и две катушки индуктивностями  $L_1 = L_2$ . Вася собрал такую схему, что гудение на частоте 100 Гц пропало вовсе, а на других частотах значительно уменьшилось. Нарисуйте схему, придуманную Васей. Чему равно сопротивление нагрузки? Какова индуктивность катушек? Считайте, что нагрузка представляет собой активное сопротивление и оно оставалось неизменным.

С.Дмитриев

**Решения задач М2610–М2613, Ф2617–Ф2620**

**М2610.** Вершины правильного стоугольника покрашены в 10 цветов. Докажите, что можно выбрать 4 вершины этого стоугольника, являющиеся вершинами прямоугольника и покрашенные не более чем в два различных цвета.

Впишем данный стоугольник в окружность. Рассмотрим каждый из 50 диаметров, образуемых вершинами стоугольника. Заметим, что если среди них есть два диаметра, для которых набор цветов вершин совпадает, то четыре конца этих диаметров образуют подходящий под условие прямоугольник. Вариантов раскрасить концы диаметра в два различных цвета (без учета порядка) всего  $10 \cdot 9 : 2 = 45$ . Значит, если подходящий прямоугольник еще не найден, найдутся хотя бы пять диаметров, концы которых одноцветны. Выберем любые два, их концы образуют подходящий прямоугольник.

Е.Бакаев

**М2611.** Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB \neq AC$  (рис.1). Пусть  $M$  – середина отрезка  $AB$ ,  $K$  – середина дуги  $BAC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $P$  – точка, в которой серединный перпендикуляр к  $AC$  пересекает биссектрису угла  $BAC$ . Докажите, что точки  $A, M, K, P$  лежат на одной окружности.

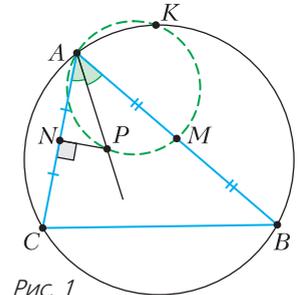


Рис. 1

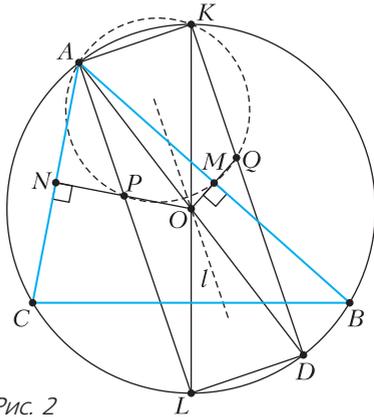


Рис. 2

Пусть  $KL$  и  $AD$  – диаметры окружности  $(ABC)$  (рис.2). Тогда  $AKDL$  – прямоугольник, центр  $O$  которого является центром окружности. Обозначим через  $l$  ту из осей симметрии прямоугольника  $AKDL$ , которая параллельна  $AL$ .

Заметим, что  $AL$  – биссектриса угла  $BAC$ . Отсюда  $P = AL \cap ON$ , где  $N$  – середина  $AC$ .

Серединные перпендикуляры  $OM$  и  $ON$  к сторонам  $AB$  и  $AC$  составляют равные углы с  $AL$ , поэтому  $OM$  и  $ON$  симметричны относительно  $l$ . Значит, точки  $P$  и  $Q = KD \cap OM$  симметричны относительно  $l$ , тем самым  $AKQP$  – прямоугольник, и точки  $A, K, Q, P$  лежат на окружности  $\omega$  с диаметром  $AQ$ . Но поскольку  $AM \perp QM$  ( $AB \perp OM$ ), точка  $M$  также лежит на  $\omega$ . Задача решена.

Заметим, что «уложить» четыре точки на одну окружность помогла новая, пятая точка  $Q$ , диаметрально противоположная точке  $A$  в нужной нам окружности (о таком приеме доказательства вписанности рассказано в статье Е.Бакаева, П.Кожевникова и И.Яковлева «Перпендикуляры и еще один признак вписанного четырехугольника» в «Кванте» №5–6 за 2015 г.).

Приведем схему еще одного решения (его придумали некоторые участники Кавказской олимпиады, на которой предлагалась эта задача). На луче  $CA$  отложим отрезок  $CS$ , равный  $AB/2$  (рис.3). Из равенства  $CS = BM$  можно вывести равенство треугольников  $KCS$  и  $KBM$  и тот факт, что точки  $A, K, S, M$  лежат на одной окружности (подробнее об этом можно прочи-

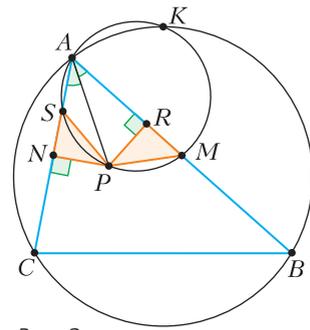


Рис. 3

тать, например, в статье А.Полянского «Воробьями по пушкам!» в «Кванте» № 2 за 2012 г.). Для решения задачи остается понять, что точки  $A, S, P, M$  лежат на одной окружности.

Если  $R$  – проекция  $P$  на  $AB$ , то  $NS = RM = |AC - AB|/2$ , где  $N$ , как и в первом решении, середина  $AC$ . Поэтому прямоугольные треугольники  $PNS$  и  $PRM$  равны (получаются поворотом вокруг  $P$ ). Отсюда  $\angle SPM = \angle NPR = 180^\circ - \angle BAC$ , что завершает доказательство.

Отметим, что в доказательстве нам снова помогла новая, пятая точка на окружности, на этот раз – точка  $S$ .

В завершение отметим, что верно также утверждение, аналогичное утверждению данной задачи:  $A, M, L$  и  $ON \cap AK$  лежат на одной окружности.

П.Кожевников

**M2612.** Поле для игры – горизонтальная клетчатая полоска  $1 \times 2019$ . Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя выбирает  $n$  натуральных чисел и записывает их на доске, после чего Вася ставит фишку в одну из клеток. Далее на каждом следующем ходе Петя называет некоторое число  $s$ , которое выписано на доске, а Вася переставляет фишку на  $s$  клеток, если это возможно, вправо или влево – по своему выбору. Если же переставить фишку ни влево, ни вправо на  $s$  клеток невозможно, то фишка остается на месте. При каком наименьшем  $n$  Петя может играть так, чтобы фишка за конечное количество ходов побывала на всех клетках полоски?

**Ответ:**  $n = 2$ .

Ясно, что  $n = 1$  не хватит: при  $n = 1$  Петя обязан называть на всех ходах одно и то же число, и если Вася может сдвинуть фишку с начальной клетки  $A$  за один ход на клетку  $B$ , то в дальнейшем он может продолжать передвигать фишку из  $B$  в  $A$ , из  $A$  в  $B$  и т.д.

При  $n = 2$  пусть Петя запишет на доске числа  $k = 1009$  и  $k + 1 = 1010$ . Клетки полочки для удобства занумеруем числами  $-k, -k + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, k$ .

Пусть в начале игры Вася ставит фишку в клетку с номером  $a < 0$ . Тогда пусть Петя называет последовательно числа  $k$  и  $k + 1$ . В ответ Вася должен будет однозначно передвинуть фишку в клетку  $a + k$  и далее в клетку  $a - 1$ . Продолжим так играть за Петю, пока фишка не окажется в клетке  $-k$  (путь фишки:  $a, a + k, a - 1, a + k - 1, a - 2, a + k - 2, \dots, 2, -k + 1, 1, -k$ ). После этого пусть Петя сделает  $2k$  ходов, поочередно называя  $k + 1$  и  $k$ . Путь фишки однозначен:  $-k, 1, -k + 1, 2, -k + 2, \dots, k - 1, -1, k, 0$ . Действуя по указанной стратегии, Петя выиграет. Аналогичная стратегия работает, если номер начальной клетки больше 0. Если же изначально Вася поставил фишку в клетку с номером 0, то Петя в первый раз назовет  $k$ , тогда Вася сдвинет фишку в одну из клеток  $\pm k$ , после чего Петя сможет применить описанную выше стратегию.

М. Дидин

**M2613\*.** Найдите все такие функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (т.е. определенные на множестве натуральных чисел и принимающие натуральные значения), что для любых натуральных  $m$  и  $n$  число  $f(m) + n - m$  делится на  $f(n)$ .

**Ответ:** 1)  $f(n) = n + c$  (где  $c$  — заданное целое неотрицательное число);

2)  $f(n) = 1$ ;

3)  $f(n) = 1$  при четных  $n$  и  $f(n) = 2$  при нечетных  $n$ ;

4)  $f(n) = 2$  при четных  $n$  и  $f(n) = 1$  при нечетных  $n$ .

Предположим, что  $f(n)$  может принимать сколь угодно большие значения. Перепишем сравнение:  $f(m) - m \equiv f(n) - n \pmod{f(n)}$ . Тогда предположим, что  $f(a) - a \neq f(b) - b$  для каких-то  $a$  и  $b$ .

Рассмотрим такое  $n$ , что  $f(n) > |f(a) - a| + |f(b) - b|$ . Тогда  $f(a) - a \equiv f(n) - n \pmod{f(n)}$  и в то же время  $f(b) - b \equiv f(n) - n \pmod{f(n)}$ . Тем самым,  $f(a) - a - (f(b) - b)$  делится на  $f(n)$ , но  $f(n)$  было специально выбрано достаточно большим, чтобы это было невозможно.

Поэтому если  $f(n)$  принимает сколь угодно большие значения, то  $f(n) - n$  — константа. Очевидно, что все такие функции подходят.

Остался случай, когда  $f(n)$  принимает только конечное число значений. Перепишем сравнение в виде

$$m - f(m) \equiv n \pmod{f(n)}. \quad (*)$$

Обозначим наибольшее значение  $f(n)$  через  $s$ , а через  $a$  обозначим такое число, что  $f(a) = s$ .

Пусть  $s = 1$ , тогда для любого  $n$  имеем  $f(n) = 1$ .

Пусть  $s = 2$ . Тогда если  $a$  нечетное, то из (\*) получаем, что  $m$  и  $f(m)$  должны быть разной четности для всех  $m$ . Отсюда  $f(n) = 1$  для четных  $n$  и  $f(n) = 2$  для нечетных  $n$ . Если же  $a$  четное, то  $m$  и  $f(m)$  должны быть одной четности для всех  $m$ , откуда  $f(n) = 1$  для нечетных  $n$  и  $f(n) = 2$  для четных  $n$ .

Пусть теперь  $s > 2$ . Подставим в (\*)  $a$  вместо  $n$ . Получим, что  $f(m) \equiv m - a \pmod{s}$ . Кроме того, мы знаем, что  $1 \leq f(m) \leq s$ , откуда получаем, что  $f(a + ks) = s$  для любого  $k$ , и  $f(a + ts - 1) = s - 1$  для любого  $t$ . Теперь подставим в (\*)  $a + ks$  вместо  $m$  и  $a + ts - 1$  вместо  $n$ , получим  $a + ks - s \equiv a + ts - 1 \pmod{s - 1}$ , или  $1 \equiv t - k \pmod{s - 1}$ . Но так как  $k$  и  $t$  можно выбрать любыми, получаем противоречие.

М. Сагафьян

**Ф2617.<sup>1</sup>** На заднем колесе велосипеда, имеющем радиус  $R = 35$  см, на спицах закреплен маленький фонарик. При езде велосипеда по прямой дороге со скоростью  $v = 7$  м/с линия, касательная к траектории движения фонарика, в некото-

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2617–Ф2620 — С. Варламов.

рых точках составляет с горизонтом максимальный угол  $\alpha = 45^\circ$ . На каком расстоянии от оси заднего колеса находится фонарик? С какой максимальной и с какой минимальной по величине скоростью движется фонарик? (Дорога неподвижна.)

Движение фонарика относительно системы отсчета, в которой дорога неподвижна, можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного движения с переносной скоростью  $v$  вместе с рамой велосипеда и вращательного движения на расстоянии  $x$  от оси колеса со скоростью  $u = v \frac{x}{R}$ . Поскольку по условию задачи максимальный угол касательной к траектории движения фонарика с горизонтом равен  $45^\circ$ , то величины этих скоростей относятся как

$$\frac{u}{v} = \frac{x}{R} = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда находим расстояние фонарика от оси колеса:

$$x = R \sin \alpha = 24,75 \text{ см} \approx 25 \text{ см},$$

а также максимальную и минимальную скорости фонарика относительно дороги:

$$v_{\max} = v(1 + \sin \alpha) = 11,95 \text{ м/с} \approx 12 \text{ м/с},$$

$$v_{\min} = v(1 - \sin \alpha) = 2,05 \text{ м/с} \approx 2 \text{ м/с}.$$

**Ф2618.** Четыре пластиковых стаканчика были вставлены друг в друга и во внутренний стаканчик был налит парафин. Большое количество стаканчиков обеспечивало замедление процессов теплопередачи. За ночь парафин застыл и принял интересную форму (рис. 1). Внешние поверхности парафина в точности копировали внутреннюю поверхность стенок стаканчика, в котором парафин



Рис. 1

застывал. А вот верхняя поверхность парафина, которая была горизонтальной, когда парафин был жидким, стала «не горизонтальной». Высота каждого стаканчика 9 см, диаметр в самом верху 6,4 см, емкость 200 мл. В углубление-ямку помещается 30 мл воды. В вертикальном сечении, проходящем через ось симметрии стаканчика, глубина ямки зависит от расстояния по горизонтали до оси. Какой была бы эта зависимость, если бы стаканчик имел в точности цилиндрическую форму с соотношением высота/диаметр = 3/2?

Предположим, что тепло отводится от застывающего и кристаллизующегося парафина через боковые стенки стаканчика и через дно, а через верхнюю поверхность потока тепла нет. Это сильное упрощение того, как идет процесс кристаллизации на самом деле. Предположим также, что снизу и с боков скорость роста толщины слоя парафина одинаковая, т.е. вплоть до затвердевания последней порции парафина на оси симметрии стаканчика вверху есть парафин в жидком состоянии. Упрощение модели остывания нужно, чтобы уравнение для описания такой модели можно было решить хотя бы численными методами.

Плотность жидкого вещества  $\rho_{\text{ж}}$  меньше плотности твердого  $\rho_{\text{т}}$ , и отношение плотностей такое, что выполняется соотношение

$$200\rho_{\text{ж}} = (200 - 30)\rho_{\text{т}}, \text{ или } \frac{\rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}} = \frac{20}{17}.$$

Масса вещества сохраняется, и из этого соображения нам удастся получить нужное уравнение. Обозначим текущие значения величин так: радиус жидкой части парафина – через  $R$ , координату верхней части жидкого участка, отсчитываемую от дна сосуда, – через  $H$ , а координату нижней части жидкого парафина – через  $s$ . Малые изменения радиуса  $R$  и координаты  $s$  обозначим через  $x$  и выразим новую координату  $H_1 = H + h$ . Поскольку масса парафина сохраняется при застывании, то можно записать такое соотношение:

$$\pi R^2 (H - s)\rho_{\text{ж}} = \pi (R - x)^2 (H_1 - (s + x))\rho_{\text{ж}} + (2\pi R x H + x\pi (R - x)^2)\rho_{\text{т}}.$$

В этом уравнении  $H$  и  $H_1$  – это начальная и конечная координаты верхнего участка жидкого парафина при малых изменениях радиуса и нижней координаты жидкой части. Раскрыв скобки и оставив только величины первого порядка малости, получим

$$0 = R(h - x)\rho_{\text{ж}} - 2x(H - s)\rho_{\text{ж}} + (2xH + xR)\rho_{\text{т}}.$$

После преобразований остается

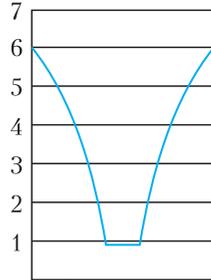
$$h = -x \frac{2s + (2H + R)\left(\frac{\rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}} - 1\right)}{R}.$$

Поскольку  $R$  и  $s$  изменяются линейно с одинаковой скоростью, можно выразить их так:  $R = R_0 - X$ ,  $s = X$ . Тогда

$$h = -x \frac{2X + (2H + R_0 - X)\left(\frac{\rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}} - 1\right)}{R_0 - X}.$$

Теперь можно задать соответствующие условию начальные значения координат:  $H_0 = 6R_0$ . Поскольку переменные не разделяются, проведем вычисления с помощью компьютера. Процесс кристаллизации заканчивается, когда  $H = s$ . Нужно получить график зависимости  $H(R)$ . Результаты вычислений с помощью программы Excel приводят к графику, приведенному на рисунке 2. Качественно картина соответствует эксперименту. Вблизи стенок

Рис. 2



наклон поверхности самый маленький, а при приближении к оси этот наклон увеличивается. Самая большая глубина ямки достигается на оси симметрии. Естественно, что упрощенная модель не дает точного количественного соответствия экспериментальных данных и результатов вычислений. В частности, эксперимент проводился с коническим стаканом, а вычисления – с моделью цилиндрического стакана, да и само модельное опи-

сание явления тоже не вполне соответствовало реальной физике. Но, как говорится, «лучше синица в руках, чем журавль в небе».

**Ф2619.** Сосуд в форме куба с ребром  $a = 1$  м заполнен морской водой с удельным сопротивлением  $\rho = 0,3$  Ом·м. Две противоположные вертикальные грани куба сделаны из медных пластин, а остальные грани куба сделаны из полиэтилена (непроводящего материала). К медным граням подвели переменное напряжение  $U = 30$  В. Естественно, пошел ток, он был равен  $I_0 = 100$  А. Затем в центр куба поместили полиэтиленовый шарик. Оцените размер этого шарика, если лишняя вода вытекла, а ток стал равен  $I = 99$  А.

Мысленно разрежем куб на множество тонких пластин, параллельных друг другу и проводящим медным стенкам. Если толщина пластины равна  $dx$ , а площадь, занятая проводящей средой (морской водой), равна  $a^2 - S_x$ , где  $S_x$  – это сечение полиэтиленового шарика, соответствующее координате  $x$ , то оценка общего сопротивления воды между медными стенками получается такой:

$$R = \int_0^a \frac{\rho}{a^2 - S_x} dx.$$

Соответственно, ток будет равен  $U/R$ . Поскольку ток изменился всего на 1%, можно считать, что для любой пластины выполняется неравенство  $a^2 \gg S_x$ . Тогда сопротивление куба с шариком внутри можно приблизительно считать равным

$$R = \int_0^a \frac{\rho(a^2 + S_x)}{a^2} dx = R_0 \left(1 + \frac{4\pi r^3}{3a^3}\right).$$

В этой формуле  $r$  – это радиус вставленного в куб полиэтиленового шарика. Второе слагаемое в круглых скобках оказывается равным примерно 0,01. Отсюда можно вычислить радиус шарика:

$$r \approx 0,13a = 0,13 \text{ м}.$$



Рис. 1

**Ф2620.** На фотографии (рис.1), взятой с сайта [webdiscover.ru](http://webdiscover.ru), видны радуга, море, строения, деревья, тени. Используя эту фотографию и сделав разумные предположения, попробуйте оценить, на какой высоте над морем находился фотограф, получивший такой снимок.

Будем считать, что поверхность суши плоская и что улицы в городке либо параллельны друг другу, либо перпендикулярны (это разумное предположение). Тогда можно найти точки на фотографии, соответствующие горизонту. Одна точка получается, если провести линии (черные) вдоль параллельных дорог городка и они пересекутся в одной точке (рис.2). Вторая точка получится, если провести линии (желтые) по теням, падающим на горизонтальную поверхность от высо-

ких деревьев. Фиолетовая точка – центр двух видимых радуг. Красная линия соответствует виртуальному горизонту (в предположении, что земля плоская). По треугольнику, составленному красной линией и двумя зелеными линиями, можно вычислить угловую высоту Солнца над горизон-



Рис. 2

том: приблизительно  $15,4^\circ$ . Ширина первой цветной радуги равна примерно  $3,5^\circ$ , а направление на нее составляет с направлением солнечных лучей около  $42^\circ$ . Размеры двух домов, расположенных на переднем плане фотографии (3-х и 2-х этажных), и высоты деревьев, расположенных рядом с ними, можно оценить так: высота домов порядка 10 метров, высота деревьев и ширина домов порядка 15 метров. Эти размеры соответствуют размерам автомобилей на дороге, расположенной за домами на небольшом расстоянии от них. Дом, находящийся внутри первой радуги на фотографии, имеет вдоль направления на центр радуги размер порядка 1 см, а радиус радуги равен примерно 7 см. Угловой размер этого дома составляет примерно  $42^\circ/7 = 6^\circ$ , или  $0,1$  рад. Размер дома вдоль выбранного направления приблизительно равен  $\sqrt{10^2 + 15^2}$  м  $\approx 18$  м

и дом виден под углом  $0,1$  рад, следовательно, расстояние от дома до фотографа примерно 180 м. Если мысленно передвинуть такой дом по горизонтали вправо, чтобы на фотографии он был на одной прямой линии с фотографом и центром двух радуг, то его угловой размер изменится совсем немного и на величину оценки это не повлияет. В таком случае этот дом делит расстояние от центра радуг до первой радуги пополам, т.е. направление фотоаппарат–передвинутый дом составит с направлением солнечных лучей угол  $42^\circ/2 = 21^\circ$ . Высоту фотографа над морем можно оценить так:

$$180 \text{ м} \cdot \sin(15,4^\circ + 21^\circ) \approx 100 \text{ м}.$$

Скорее всего, фотограф находился в кресле под парашютом, который за собой на тросе тащил катер (но это лишь разумное предположение).

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

*Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.*

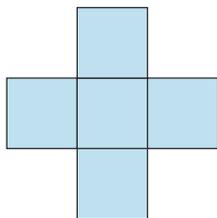
*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest  
Желаем успеха!*

5. Можно ли все натуральные числа окрасить в семь цветов так, чтобы каждый цвет присутствовал и произведение любых двух чисел одного цвета (в том числе, равных чисел) было числом того же цвета?

*М. Евдокимов*

6. Два игрока играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой плоскости. Выигрывает тот, кто отметит своим значком пять клеток в виде креста. Всегда ли второй игрок может помешать первому выиграть?

*Д. Иванов*



7. На доске в ряд были написаны числа  $1, 2, \dots, n$ . Одним действием между каждыми двумя соседними числами записывают их сумму, затем исходные числа стирают. Через несколько действий на доске осталось одно число. Какое? (Например, если изначально написаны числа  $1, 2, 3$ , то вместо них будут написаны  $3, 5$ , а затем вместо них  $- 8$ .)

*В. Расторгуев*

8. Существует ли выпуклый многогранник, все грани которого – равные тупоугольные треугольники, если его грани а) равнобедренные треугольники; б) не равнобедренные треугольники?

*Е. Бакаев*

# Попробуем решить иначе

М. БОНДАРОВ

КАК ИЗВЕСТНО, УНИВЕРСАЛЬНОГО метода решения задач по физике не существует. Однако есть приемы, которые можно применить ко многим задачам. Среди них выделяются так называемые *стандартные*, знакомству с которыми обычно уделяется большая часть времени на уроках. Используя стандартные приемы, можно решить практически все задачи из различных задачников.

В то же время нередко бывает полезно заняться поиском *альтернативных* подходов к решению задачи. Случается, что такие поиски позволяют раскрыть новое содержание в условии, обнаружить некий скрытый смысл и тем самым глубже разобраться в физических явлениях, о которых говорится в задаче.

Рассмотрим некоторые из этих приемов на примере конкретных задач.

**Задача 1.** На гладком горизонтальном столе лежит призма массой  $M$  с углом наклона  $\alpha$ , а на ней – призма массой  $m$  (рис.1). На меньшую призму действует горизонтальная сила  $F$ , при этом обе призмы движутся

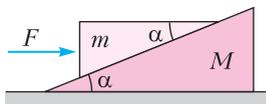


Рис. 1

вдоль стола как одно целое (т.е. не изменяя взаимного расположения). Определите силу трения между призмами.

**Стандартное решение.** Стандартный подход к решению подобных задач хорошо известен. Вот его краткий путь: 1) делаем рисунок, на котором изображены тела, действующие на них силы, ускорения тел, оси координат; 2) записываем уравнения движения тел (второй закон Ньютона); 3) пишем вспомогательные уравнения (третий закон Ньютона, уравнения кинематики и т.п.).

Итак, начнем с того, что изобразим на рисунках силы, действующие на каждую призму (лучше сделать два рисунка для каждого тела в отдельности). На верхнюю призму действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила  $\vec{F}$  и две силы со стороны нижней призмы: сила реакции опоры (равная по величине силе

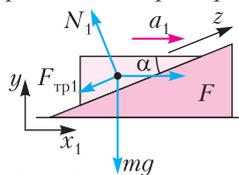


Рис. 2

нормального давления)  $\vec{N}_1$  и сила трения покоя  $\vec{F}_{тр1}$  (рис.2). Направления трех первых сил определить не сложно, а вот выяснить,

куда направлена сила трения, не так просто. Ясно, что она направлена вдоль поверхности соприкосновения призм, но куда именно – вверх или вниз – без дополнительного исследования едва ли удастся определить. Придется выбрать одно из этих направлений произвольно (например, вниз, против оси  $z$ ), а затем, дойдя до конечного ответа, нужно не забыть проанализировать полученный результат. После такого выбора однозначно определяются направления всех сил, действующих на нижнюю призму. Это сила тяжести  $M\vec{g}$ , сила реакции опоры со стороны стола  $\vec{N}_0$ , две силы со стороны верхней

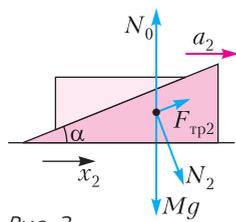


Рис. 3

призмы: сила нормального давления  $\vec{N}_2$  и сила трения покоя  $\vec{F}_{тр2}$  – она направлена против  $\vec{F}_{тр1}$ , т.е. вдоль оси  $z$  (рис.3).

Рисунки 2 и 3 помогают нам записать уравнения второго закона Ньютона в векторной форме для каждой призмы:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр1} = m\vec{a}_1,$$

$$M\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр2} + \vec{N}_0 = M\vec{a}_2.$$

Эти векторные уравнения в проекциях на горизонтальную ось ( $x$ ) и вертикальную ось ( $y$ ) с учетом третьего закона Ньютона:  $\vec{N}_1 = -\vec{N}_2$ ,  $N_1 = N_2 = N$ ;  $\vec{F}_{тр1} = -\vec{F}_{тр2}$ ,  $F_{тр1} = F_{тр2} = F_{тр}$  и того факта, что тела движутся как единое целое:  $a_1 = a_2 = a$ , принимают вид

$$F - F_{тр} \cos \alpha - N \sin \alpha = ma,$$

$$F_{тр} \cos \alpha + N \sin \alpha = Ma,$$

$$N \cos \alpha - mg - F_{тр} \sin \alpha = 0.$$

Таким образом, получена система уравнений, из которой можно определить искомую силу трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{M}{M+m} F \cos \alpha - mg \sin \alpha.$$

Ну что ж, конечный результат получен. Является ли этот ответ полным и можно ли из него понять, угадано ли нами направление силы трения? Вспомним наше предположение: сила трения, действующая на верхнюю призму, направлена против оси  $z$ . Из анализа последнего выражения следует, что выбранное нами направление силы трения совпадает с истинным, если

$$\frac{M}{M+m} F \cos \alpha - mg \sin \alpha > 0, \text{ т.е.}$$

$$F > \frac{M+m}{M} mg \operatorname{tg} \alpha.$$

В противном случае, если

$$F < \frac{M+m}{M} mg \operatorname{tg} \alpha,$$

направления сил трения  $\vec{F}_{\text{тр}1}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}2}$  меняются на противоположные, но их модули можно рассчитывать по единой формуле:

$$F_{\text{тр}} = \left| \frac{M}{M+m} F \cos \alpha - mg \sin \alpha \right|.$$

Это и есть ответ к задаче.

Подводим итог этому способу решения. Можно ли было осуществить его короче? На первый взгляд, вроде бы, нет. Но на самом деле такой путь имеется, и состоит он в том, чтобы объединить тела, заменив их одним с общей массой и общим ускорением. Это позволит не учитывать силы взаимодействия между призмами, которые станут внутренними и автоматически исчезнут из уравнений. Правда, тем самым пропадет искомая величина. Что ж, дополнительно придется записать еще одно уравнение движения для одной из призм. А чтобы избежать попадания в него неизвестной силы, воспользуемся еще одним приемом: удачным выбором оси координат.

**Альтернативное решение.** Рассмотрим обе призмы как одно тело, масса которого равна  $M+m$ , движущееся горизонтально с ускорением  $\vec{a}$  (рис.4). На него действуют три

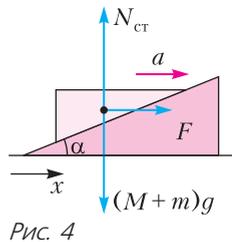


Рис. 4

силы: сила тяжести  $(M+m)\vec{g}$ , сила нормальной реакции со стороны стола  $\vec{N}_{\text{ст}}$  и горизонтальная сила  $\vec{F}$ . Второй закон Ньютона для этого объединенного тела в проекции на горизонтальную ось  $x$  принимает вид

$$F = (M+m)a.$$

Искомую силу трения проще всего найти, рассмотрев верхнюю призму (см. рис.2). Запишем для этой призмы второй закон Ньютона в проекциях на ось  $z$ :

$$F \cos \alpha - F_{\text{тр}} - mg \sin \alpha = ma \cos \alpha.$$

Как видим, выбор оси, действительно, оказался удачным. Поскольку вектор силы  $\vec{N}_1$  перпендикулярен оси  $z$ , его проекция на эту ось равна нулю. Таким образом, имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными, откуда легко находим искомую силу трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{M}{M+m} F \cos \alpha - mg \sin \alpha.$$

Подводим итог. Примененные нами приемы – объединение тел в единое целое и удачный выбор оси, на которую проецируется уравнение второго закона Ньютона, – позволили значительно упростить решение данной задачи.

**Задача 2.** На гладкой горизонтальной поверхности находится горка, масса которой  $M=8$  кг, а высота  $h=1$  м (рис.5). На вершину горки положили тело массой  $m=2$  кг, которое, скатившись, упруго ударяется о пружину,

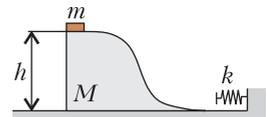


Рис. 5

на которую поднимется тело в этом случае. Трение в системе отсутствует.

**Стандартное решение.** Заметим, что в данном случае движения тела по горке и самой горки по горизонтальной поверхности не являются равноускоренными. Поэтому динамический подход в данной задаче применить не удастся. Ничего страшного, в нашем распоряжении имеются законы сохранения. Их можно использовать, поскольку трение в системе отсутствует и в горизонтальном направлении никаких внешних воздействий нет, не считая кратковременного соприкосновения тела с пружиной.

Разобьем решение на три этапа: 1) спуск тела с горки; 2) взаимодействие тела с пружиной; 3) въезд тела на горку.

1) Пусть скорость тела после спуска с горки равна  $v_1$ , а скорость самой горки в этот момент равна  $v_2$ . Запишем законы сохранения импульса и механической энергии для системы «горка – тело»:

$$0 = mv_1 - Mv_2,$$

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}.$$

Из этих уравнений определим скорости горки и тела при его движении до пружины:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}.$$

2) Взаимодействие тела с пружиной приведет к тому, что вектор его скорости изменит направление на противоположное, оставив прежней свою величину  $v_1$ .

3) Наконец, отскочив от пружины, тело массой  $m$  догонит горку, заедет на нее и в точке наивысшего подъема будет вместе с ней двигаться относительно земли со скоростью  $v_3$ . Законы сохранения теперь примут такой вид:

$$mv_1 + Mv_2 = (M+m)v_3,$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{(M+m)v_3^2}{2} + mgh.$$

Из этой системы уравнений получаем

$$H = h \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2 = 0,36 \text{ м.}$$

**Альтернативное решение.** Энергия системы «горка – тело» будет оставаться неизменной в любой момент времени, когда пружина не деформирована. В начальный момент энергия  $E_1$  системы равна потенциальной энергии тела (за ноль потенциальной энергии принята энергия на уровне плоскости):

$$E_1 = mgh.$$

Из закона сохранения импульса следует, что после того как тело покинет горку, но еще не коснется пружины, тело и горка будут иметь равные по модулю импульсы  $p$ . В это время энергия системы  $E_2$  состоит из суммы кинетических энергий горки и тела:

$$E_2 = \frac{p^2}{2M} + \frac{p^2}{2m}.$$

Когда тело, отскочив от пружины, догонит горку и поднимется на максимальную высоту, система «горка – тело» будет иметь импульс  $2p$ , а ее энергия станет равной

$$E_3 = \frac{(2p)^2}{2(M+m)} + mgh.$$

Поскольку выполняется закон сохранения механической энергии, то  $E_1 = E_2 = E_3$ , или

$$mgh = \frac{p^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} = \frac{(2p)^2}{2(M+m)} + mgh.$$

Отсюда находим искомую высоту:

$$H = h \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

Как видим, *неявное использование закона сохранения импульса и не часто встречающаяся запись формулы кинетической энергии*

$E_k = \frac{p^2}{2m}$  позволили упростить решение задачи.

*Замечание.* В некоторых задачах полезно учесть соотношение между заданными величинами, что иногда позволяет существенно сократить процесс решения. Так, в нашем случае можно было прийти к верному ответу практически устно, заметив, что  $M = 4m$ . Действительно, из последней формулы для кинетической энергии следует, что после соскальзывания кинетическая энергия тела  $E_{к2}$  будет составлять  $4/5$  от общей энергии системы  $E_1$ , т.е.  $E_{к2} = \frac{4}{5}mgh$ . Выразим далее через  $E_1$  общую кинетическую энергию  $E_{к3}$  системы «горка – тело» в момент достижения телом высоты  $H$ . Поскольку импульс системы вдвое больше импульса тела после отскока от пружины, а ее масса больше массы тела в 5 раз, то

$$E_{к3} = \frac{2^2}{5} E_{к2} = \frac{2^2}{5} \cdot \frac{4}{5} mgh = \frac{16}{25} mgh.$$

Итак, в начале движения полная энергия системы равнялась  $mgh$ , в конце кинетическая энергия системы составляла  $\frac{16}{25}mgh$ . Значит, на долю потенциальной энергии в этот момент приходилось  $\frac{9}{25}mgh$ . Таким образом, искомая высота равна

$$H = \frac{9}{25} h = 0,36 \text{ м.}$$

**Задача 3.** С поверхности земли подброшен вертикально вверх небольшой шарик с начальной скоростью  $v_0 = 5$  м/с. В тот момент когда он достиг верхней точки, снизу с того же места подброшен точно такой же шарик с такой же начальной скоростью. При столкновении шарики слипаются и движутся далее как одно целое. Определите промежуток времени  $t$ , в течение которого первый шарик находился в полете от момента броска до момента соприкосновения с поверхностью земли. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Стандартное решение.** Выберем систему отсчета с началом на поверхности земли и координатной осью  $y$ , направленной вертикально вверх. Уравнения движения шариков имеют вид

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

$$y_2(t) = v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2},$$

где  $t_0 = \frac{v_0}{g}$  – время подъема первого шарика до верхней точки. Из равенства  $y_1(t_1) = y_2(t_2)$  находим, что промежуток времени  $t_1$  от момента подбрасывания первого шарика до столкновения шариков равен

$$t_1 = \frac{3v_0}{2g},$$

а высота  $h$ , на которой произойдет столкновение, составляет

$$h = \frac{3v_0^2}{8g}.$$

Непосредственно перед столкновением скорости каждого из шариков по величине равны  $v = v_0/2$ , но направлены в противоположные стороны. По закону сохранения импульса сразу после столкновения скорость слипшихся шариков равна нулю. Время их свободного падения на землю с высоты  $h$  равно

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{2g} \sqrt{3}.$$

Общее время полета первого шарика (т.е. искомый промежуток времени) равно

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{2g} (3 + \sqrt{3}) \approx 1,2 \text{ с.}$$

**Альтернативное решение.** Как и в первом способе решения, определим сначала время полета первого шарика до верхней точки:  $t_0 = v_0/g$ . Рассмотрим далее систему из двух шариков как единое целое. Центр масс этой системы находится на высоте  $H/2$  и имеет скорость  $v_0/2$ . Здесь  $H$  – максимальная высота подъема первого шарика, которую легко найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH, \text{ и } H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Уравнение движения центра масс от момента слипания шариков до момента их падения в течение времени  $T$  имеет вид

$$-\frac{H}{2} = \frac{v_0}{2}T - \frac{gT^2}{2},$$

или

$$T^2 - \frac{v_0}{g}T - \frac{v_0^2}{2g^2} = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$T = \frac{v_0}{2g} (1 + \sqrt{3}).$$

Таким образом, общее время полета равно

$$t = t_0 + T = \frac{v_0}{2g} (3 + \sqrt{3}).$$

Обратите внимание, что, решая первым способом, мы попутно узнали некоторые подробности движения (например, время движения шариков до столкновения и высоту, на которой они столкнулись). Зато второй способ – *метод центра масс* – оказался значительно короче.

**Задача 4.** Груз висит на пружине жесткостью  $k = 60$  Н/м. Какую надо совершить работу, чтобы растянуть пружину еще на  $x_1 = 2$  см?

**Стандартное решение.** При растяжении пружины изменяются две потенциальные энергии: самой пружины – она увеличивается на  $\Delta E_{п1} = \frac{k(x_0 + x_1)^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}$  и груза в поле тяготения – его энергия уменьшается на  $\Delta E_{п2} = mgx_1$ , где  $x_0$  – начальная деформация пружины,  $m$  – масса груза. Искомая работа пойдет на изменение этих потенциальных энергий:

$$A = \frac{k(x_0 + x_1)^2}{2} - \left( mgx_1 + \frac{kx_0^2}{2} \right).$$

При этом в начальном положении груз находился в равновесии:

$$mg = kx_0.$$

Из этих выражений получим

$$A = \frac{kx_1^2}{2} = 12 \text{ мДж}.$$

Задача решена, но трудно не заметить, что конечное выражение для работы имеет тот же вид, как если бы происходило растяжение недеформированной пружины на величину  $x_1$ . Попробуем разобраться, в чем причина такого совпадения.

**Альтернативное решение.** Изобразим график зависимости силы упругости  $F$ , возникающей в пружине, от ее удлинения  $x$  (рис. 6).

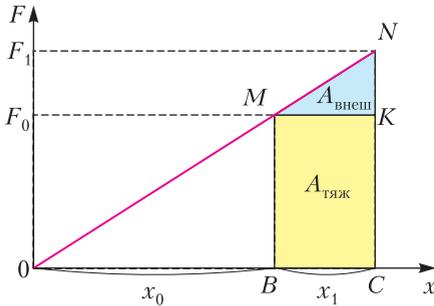


Рис. 6

Первоначально груз растянул пружину на величину  $x_0$ , поэтому

$$mg = F_0 = kx_0.$$

При растяжении пружины еще на величину  $x_1$  она совершает отрицательную работу, модуль которой численно равен площади трапеции  $BMNC$ . В то же время из графика видно, что работа силы тяжести  $A_{\text{тяж}}$  (выделено желтым) и работа искомой внешней силы  $A_{\text{внеш}}$  (выделено синим) в сумме дают то же значение. По условию требуется определить только  $A_{\text{внеш}}$ . Ее легко найти из графика:

$$A_{\text{внеш}} = \frac{(F_1 - F_0)x_1}{2}.$$

Но  $F_1 - F_0 = kx_1$ , поэтому

$$A_{\text{внеш}} = \frac{kx_1^2}{2}.$$

**Замечание.** Давайте снова посмотрим на график. Если перенести выделенный синим треугольник в начало координат, то нетрудно видеть, что его площадь будет численно равна работе силы упругости при ее растяжении из недеформированного состояния на

величину  $x_1$ . Другими словами, полезно иметь в виду, что при смещении подвешенного груза от положения равновесия действие двух сил – тяжести и упругости – можно заменить на действие одной силы упругости, деформация которой отсчитывается от положения равновесия.

**Задача 5.** На наклонной плоскости с углом  $\alpha$  находится кубик (рис. 7). К кубику прикрепена легкая пружина, другой конец которой закреплен в неподвижной точке  $A$ . В исходном состоянии кубик удерживается в положении, при котором пружина не деформирована. Кубик отпускают без начальной скорости. Определите максимальную скорость кубика в процессе движения. Масса кубика  $m$ , жесткость пружины  $k$ , коэффициент трения  $\mu$  ( $\mu < \text{tg } \alpha$ ).

Рис. 7

**Стандартное решение.** В процессе движения на кубик действуют (рис. 8): сила тяже-

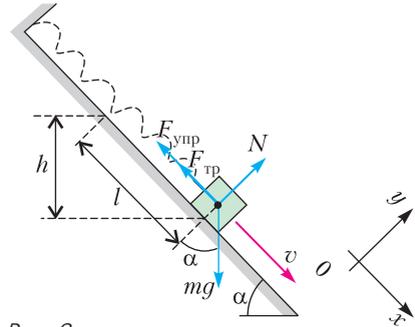


Рис. 8

сти  $m\vec{g}$ , направленная вертикально вниз; сила нормальной реакции опоры  $\vec{N}$ , направленная перпендикулярно наклонной плоскости; сила трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , направленная вдоль наклонной плоскости вверх; сила упругости пружины  $\vec{F}_{\text{упр}}$ , направленная также вдоль наклонной плоскости вверх (предполагается, что ось пружины параллельна наклонной плоскости).

По условию в начальный момент пружина не деформирована. Когда кубик отпускают, он начинает двигаться прямолинейно по наклонной плоскости вниз. При этом скорость кубика увеличивается и в некоторый момент времени достигает искомого максимального значения  $v$ . Пусть к этому моменту кубик

прошел вдоль наклонной плоскости путь  $l$ . Значит, деформация пружины при этом также равна  $l$ . Кроме того, смещение кубика по вертикали вниз будет равно  $h = l \sin \alpha$ . Если считать потенциальную энергию кубика в поле тяжести в этом положении равной нулю, то приращение механической энергии кубика за время, прошедшее с момента начала движения, будет равно

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kl^2}{2} - mgl \sin \alpha.$$

С другой стороны, это приращение должно быть равно суммарной работе неконсервативных сил, действующих на кубик. Сила нормальной реакции опоры работы не совершает, а работа силы трения скольжения равна  $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}l$ , причем  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Тогда

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kl^2}{2} - mgl \sin \alpha = -\mu Nl.$$

Запишем для кубика уравнения второго закона Ньютона в проекциях на оси  $x$  и  $y$  для момента времени, когда скорость кубика максимальна (ускорение кубика при этом равно нулю):

$$mg \sin \alpha - F_{\text{упр}} - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$N - mg \cos \alpha = 0,$$

где  $F_{\text{упр}} = kl$ ,  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Отсюда

$$l = \frac{m}{k} g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Окончательно получим

$$v = \sqrt{\frac{m}{k}} g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

**Альтернативное решение.** После решения задачи в общем виде полезно задуматься над ответом. Не правда ли, в нем проявляются знакомые черты? Ну, конечно, искомая скорость равна произведению двух хорошо известных величин. Один из сомножителей – это ускорение  $a$  тела, скатывающегося с наклонной плоскости:

$$a = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Другой сомножитель – величина, обратная циклической частоте  $\omega$  гармонических колебаний груза на пружине:

$$\frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Случайно ли такое совпадение? Скорее всего, нет, ведь обе величины имеют непосред-

ственное отношение к процессам, происходящим в нашей задаче. Правда, формула для ускорения подходит лишь в случае отсутствия действия на тело силы упругости пружины. Тогда как формулу циклической частоты привычно применяют для колебаний груза на пружине без трения. У нас же сила упругости пружины отсутствует только в начальный момент движения, когда ускорение тела максимально. Стоп! Вот мы и наткнулись на подсказку. Существует же формула связи максимальной скорости  $v_m$  и максимального ускорения  $a_m$  при гармонических колебаниях:

$$a_m = \omega v_m.$$

Выходит, если подставить в нее выражения для  $a$  и  $\omega$ , получится верное значение для максимальной скорости.

А возможно ли применение формулы, связывающей  $a_m$  и  $v_m$ , в данной задаче? Вспомним происхождение этой формулы. Как известно, она выводилась из уравнения зависимости координаты колеблющегося тела от времени:  $x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ . А само это уравнение оказалось решением дифференциального уравнения (второго закона Ньютона) для колебательного движения:  $x'' + \omega^2 x = 0$ , где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – частота для колебаний груза на пружине.

Итак, направление поиска известно: *надо записать аналогичное уравнение в нашем случае и сравнить с уравнением колебаний*. Из анализа стандартного решения следует:

$$mg \sin \alpha - F_{\text{упр}} - F_{\text{тр}} = ma.$$

Но  $a = x''$ ,  $F_{\text{упр}} = kx$  ( $x$  – удлинение пружины в произвольный момент времени),  $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$ . Тогда получим

$$mg \sin \alpha - kx - \mu mg \cos \alpha = mx'',$$

или

$$x'' + \frac{k}{m} x + g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) = 0.$$

Это уравнение отличается от уравнения колебаний лишь на константу  $C = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$ . А значит, в нашем случае циклическая частота и соотношение между максимальными величинами ускорения и скорости имеют тот же вид, что и для гармонических колебаний.

# Как проверить число на простоту?

Как быстро проверить, является ли данное натуральное число  $n$  простым? Такая задача часто возникает на практике. Один из примеров – шифр RSA<sup>1</sup>. Это асимметричный шифр: шифрование производится закрытым ключом (известен только отправителю), а расшифровка – открытым (известен всем). Чтобы сгенерировать такую пару ключей для шифра RSA, нужно выбрать два больших числа  $p$  и  $q$ , причем оба числа должны быть простыми – иначе шифр невозможно будет расшифровать.

Проще всего действовать по определению, перебирая все числа от 1 до  $n$  и проверяя, не является ли какое-то из них делителем. Этот способ можно немного усовершенствовать: если  $n = ab$ , то меньший из двух делителей  $a$  и  $b$  окажется меньше или равен  $\sqrt{n}$ . Значит, достаточно перебирать числа не до  $n$ , а всего лишь до  $\sqrt{n}$ .

Время работы такого алгоритма, однако, будет огромным. Например, если в двоичной записи числа  $n$  тысяча разрядов (это минимальная длина криптографического ключа RSA, гарантирующая безопасность), то число проверок равно  $\sqrt{n} \approx 2^{500} \approx 3 \cdot 10^{150}$ . Если даже одна проверка делается за  $1/10^9$  секунды (частота 1 гигагерц), то для выяснения простоты числа  $n$  понадобится  $3 \cdot 10^{141} \text{ с} \approx 10^{134}$  лет! Можно попытаться «подобраться» к числу  $n$  с помощью решета Эратосфена, однако серьезного уменьшения времени работы это не даст. Нужны более глубокие идеи.

Начнем с *малой теоремы Ферма* (МТФ): если  $n$  – простое число, то для любого  $a$  от 1 до  $n - 1$  число  $a^{n-1}$  при делении на  $n$  дает остаток 1 (т.е.  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ ). Значит,

если мы вдруг нашли такое  $a$ , что остаток оказался другим, то  $n$  заведомо не простое! Разумеется, перебирать все  $a$  в попытке найти нужное – затея не лучше, чем перебирать возможные делители. Но мы попробуем *угадать*  $a$ , выбирая его случайным образом.

Эта идея не такая безнадежная, как может показаться на первый взгляд. Действительно, пусть оказалось, что  $a_0^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ , а  $a_1^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$  (т.е. если мы выбрали  $a_0$ , то мы угадали, а если выбрали  $a_1$ , то нет). Тогда  $(a_0 \cdot a_1)^{n-1} \equiv a_0^{n-1} \cdot a_1^{n-1} \equiv a_0^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ . Таким образом, если мы угадали с выбором  $a_0$ , то также удачным будет выбор  $a_0 \cdot a_1$ . Более того, если  $a_0$  взаимно просто с  $n$ , то для разных значений  $a_1$  числа  $a_0 \cdot a_1$  будут различны по модулю  $n$ . Таким образом, среди всех чисел от 1 до  $n - 1$ , взаимно простых с  $n$ , окажется не менее половины «удачных»: действительно, каждому «неудачному» числу  $a_1$  соответствует как минимум одно уникальное «удачное», равное остатку от деления  $a_0 \cdot a_1$  на  $n$  (где  $a_0$  – одно фиксированное «удачное» число).

Итак, алгоритм – его называют *тестом Ферма* – действует так. Выбираем *случайное*  $a$  в диапазоне от 2 до  $n - 1$  (число 1 выбирать бессмысленно). Если  $a$  не взаимно просто с  $n$  – это можно быстро проверить с помощью алгоритма Евклида<sup>2</sup>, то  $n$  заведомо составное. Иначе вычисляем остаток от деления  $a^{n-1}$  на  $n$ , и если он не равен 1, то  $n$  – составное. Если же равен, то *вероятность* того, что мы выбрали «неудачное»  $a$ , а для другого  $a$  получился бы неединичный остаток, не превосходит  $1/2$ . Возвести  $a$  в большую степень можно методом последовательного деления показателя пополам («быстрое возведение в степень»); при этом после

<sup>1</sup> Подробнее о шифре RSA читайте в статье В.А.Успенского «Как теория чисел помогает в шифровальном деле» (Соросовский образовательный журнал, 1996, №6).

<sup>2</sup> В.Вагутен. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики («Квант», 1972, №6); С.Абрамов. Самый знаменитый алгоритм («Квант», 1985, №11).

каждого шага лучше брать остаток по модулю  $n$ , чтобы избежать слишком больших чисел. Повторяя алгоритм  $k$  раз, каждый раз выбирая случайное  $a$  независимо, мы уменьшим эту вероятность до  $1/2^k$ , что очень быстро стремится к нулю с ростом  $k$ .

Подведем итог. Если тест Ферма отвечает, что  $n$  составное, то он совершенно точно прав; если говорит, что простое – то может ошибиться, но с очень малой вероятностью. Эту вероятность мы контролируем за счет изменения параметра  $k$  – например, можем сделать ее меньше, чем вероятность сбоя техники. Тогда на практике алгоритм будет неотличим от точного – а работает он намного быстрее, чем перебор делителей!

К сожалению, у теста Ферма есть фатальный недостаток. Существуют так называемые *числа Кармайкла*: эти вредные числа не являются простыми, но удовлетворяют МТФ для любого  $a$ , взаимно простого с  $n$ . В таком случае мы не сможем найти ни одного «удачного»  $a_0$ , и приведенное выше рассуждение недействительно. (Вероятность же случайно наткнуться на число  $a$ , не взаимно простое с  $n$ , мала.) Самые маленькие числа Кармайкла: 561, 1105, 1729. Числа Кармайкла относительно редки, однако, к сожалению, их бесконечно много.<sup>3</sup> (Иначе можно было бы «починить» тест Ферма, добавив в начале сверку с конечным списком чисел Кармайкла.)

Тем не менее, основную идею теста Ферма можно «спасти». Один из способов это сделать дает *тест Соловея – Штрассена*. Поскольку нас интересует случай нечетного  $n$  (иначе оно заведомо составное, если не равно 2), то  $n-1$  нацело делится на 2. Если  $n$  простое, то в силу МТФ имеем

$$\left( a^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right) \left( a^{\frac{n-1}{2}} + 1 \right) = a^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

откуда  $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{n}$ . Более того, знак (+ или -) можно вычислить, зная  $a$  и  $n$  – это *символ Якоби*  $\left( \frac{a}{n} \right)$ . Таким образом, мы получили новое сравнение, нарушение ко-

торого означает непростоту  $n$ , а именно:  $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left( \frac{a}{n} \right) \pmod{n}$ . Теперь, однако, никакого аналога чисел Кармайкла нет: оказывается, что для составного  $n$  всегда найдется  $a_0$ , для которого  $a_0^{\frac{n-1}{2}} \not\equiv \left( \frac{a}{n} \right) \pmod{n}$ . Да-

лее, как и для теста Ферма, можно доказать, что таких «удачных»  $a$  не менее половины среди всех чисел от 1 до  $n-1$ , взаимно простых с  $n$ . Доказательства сформулированных выше фактов элементарные, но довольно технические. Их можно найти, например, в книге О.Н.Василенко «Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии» (М.: МЦНМО, 2003).

Итак, получается алгоритм: выбираем случайное  $a$  от 2 до  $n-1$ , взаимно простое с  $n$  (если нашлось не взаимно простое – немедленно отвечаем, что  $n$  составное);

вычисляем остаток от деления  $a^{\frac{n-1}{2}}$  на  $n$  и сравниваем его по модулю  $n$  с  $\left( \frac{a}{n} \right)$ . Если ответ «не равно», то  $a$  составное, иначе – предположительно простое. Во втором случае вероятность ошибки равна  $1/2$ , теперь уже для любого  $n$ . Повторяя алгоритм  $k$  раз, снижаем вероятность ошибки до  $1/2^k$ .

Существуют и другие вероятностные тесты на простоту. А можно ли построить алгоритм проверки на простоту, который работает быстро и при этом выдает ответ *точно*, а не с некоторой (пусть и сколь угодно близкой к 1) вероятностью? Такие тесты называются *детерминированными*. Таков тест Миллера (1976). Этот тест быстрый и детерминированный, однако доказательство того, что он работает правильно, опирается на недоказанное утверждение – расширенную гипотезу Римана. Быстрый детерминированный тест, корректность которого доказана полностью, был предложен сравнительно недавно – это тест Агравала – Каяла – Саксены или AKS-тест (2002). Однако вероятностные тесты все еще работают быстрее, чем AKS-тест.

Материал подготовил С.Кузнецов

<sup>3</sup> W.R.Alford, A.Granville, C.Pomerance. There are infinitely many Carmichael numbers. Annals of Mathematics, 1994, vol. 139, p. 703–722.

# Числа харшад

А. ТОЛПЫГО

**К**РУГ ЗАДАЧ, КОТОРЫЕ РАССМАТРИВАЮТСЯ в этой статье, можно описать одной фразой:

*Как часто бывает, что число делится на сумму своих цифр?*

Оказывается, что этот простой вопрос приводит к целому циклу довольно разнообразных задач.

Числа, обладающие этим свойством, называют числами Нивена, или числами харшад (от санскритского «харша» – великая радость); такое название дал им индийский математик Д. Ч. Капрекар; для краткости будем их называть X-числами. Поскольку однозначные числа заведомо являются таковыми, сразу условимся, что мы рассматриваем только те X-числа, в которых не менее двух (или даже лучше, не менее трех) знаков.

Начнем с того очевидного факта, что все числа с суммой цифр 3 или 9 – харшад. Легко также привести примеры X-чисел с другими небольшими суммами цифр; например, таковы все четные числа с суммой цифр 2 или 6. Нетрудно придумать и другие примеры: это числа 224, 605 или 999999999.

А как быть, если сумма цифр велика? Всегда ли можно построить такое число харшад? Ответ – положительный.

**Утверждение 1.** *Для любого натурального  $m$  существует X-число с суммой цифр  $m$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим числа  $1, 10, 100, \dots, 10^k, \dots$ . Согласно принципу Дирихле, существует такой остаток  $r$ , что сколь угодно большое количество из этих чисел дают при делении на  $m$  остаток  $r$ . Теперь достаточно взять сумму  $m$  соответствующих чисел  $10^k$  для разных таких  $k$  (можно и для совпадающих, но в количестве не более 9).

**Пример 1.** Пусть  $m = 37$ . Поскольку 999 делится на 37, то все числа  $1, 10^4, 10^7, \dots, 10^{3k+1}$  дают одинаковые остатки при делении на 37. Таким образом, мы можем взять

число  $100100100\dots 1$  (и так 37 раз); но проще взять, например, число  $9009009009001$ .

*Замечание.* Ниже будет доказано существенно более сильное утверждение, а именно: каково бы ни было  $m$ , доля X-чисел среди всех чисел с суммой цифр  $m$  больше нуля (стремится к пределу, который больше нуля; более точная формулировка будет дана ниже).

## Длинные ряды

Назовем *рядом длины  $k$*  последовательность чисел  $n, n + 1, n + 2, \dots, n + k - 1$ , которые все харшад.

Поскольку ряд всегда полностью определяется своим первым членом, в дальнейшем мы, как правило, будем выписывать только его.

Нетрудно привести пример ряда длины 3: он может, например, начинаться с числа 110, поскольку 111 и 112 – тоже X-числа. (Годятся также числа 1010, 10010 и т.д.)

А можно ли построить ряд подлиннее?

**Утверждение 2.** *Существует ряд длины 10.*

Для доказательства, конечно, достаточно привести пример (что мы сейчас и сделаем), но интересно ведь знать, как его построить. Можно, разумеется, поручить дело компьютеру (и этот способ приводит к цели), но тогда – где же тут математика?

Было бы очень легко построить пример, если бы нам разрешалось рассматривать однозначные числа (все числа от 1 до 10 делятся на сумму своих цифр), но это запрещено. Тем не менее это подсказывает идею: пусть первое число оканчивается нулем, и пусть сумма его цифр равна  $r$ . Тогда следующие числа будут кончатся на 1, 2, ..., 9, а их суммы цифр будут  $r + 1, \dots, r + 9$ . Нетрудно было бы найти число (притом даже с заданной суммой цифр, если только она достаточно велика), которое делится на все эти числа, но нам нужно, чтобы делилось не одно число, а последовательные.

Но это тоже можно сделать, если применить вот какую хитрость.

Начнем с некоторого «удобного» числа (в чем именно состоит его «удобство», будет видно дальше), которое мы примем за  $r$ , т.е. за сумму цифр первого из чисел нашего ряда. Это число мы назовем *опорным числом*.

Для начала возьмем в качестве опорного число 30. Предположим, что первое наше число заканчивается цифрами ...30 или,

лучше, ...00030 (чем это лучше – станет ясно очень скоро). Тогда следующие числа будут заканчиваться на ...00031, ...00032 и т.д. Поскольку суммы цифр следующих 9 чисел будут равны как раз 31, 32 и т.д. – получается, что «хвост» каждого из следующих чисел делится на то, что нам нужно.

Остается добиться того, чтобы начало числа, обозначим его  $A$ , также делилось сразу на все нужные числа и чтобы его сумма цифр равнялась 27.

Попробуем теперь получить подряд 5  $X$ -чисел. Для этого  $A$  должно делиться на 30, 31, 32, 33 и 34 (а также на 9, поскольку сумма его цифр должна быть 27). Впрочем, делимость на 30 и на 32 получается автоматически (вот зачем нужны были три нуля перед тридцаткой!), и требуется только, чтобы оно делилось на 9, 31, 11 и 17. Иначе говоря,  $A$  должно делиться на произведение  $9 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31 = 52173$ .

Если бы сумма цифр этого числа равнялась 27, можно было бы на этом и остановиться. Но она равна 18. Можно было бы записать это число дважды (при этом делимость сохранится), но тогда сумма получится 36. Как быть?

Ответ несложен: надо записать его дважды, а затем «вдвинуть» одно число в другое так, чтобы произошел ровно один перенос в разрядах. Получится вот что:

$$\begin{array}{r} 52173 \\ 52173 \\ \hline 52225173 \end{array}$$

Таким образом, число 5222517300030 годится: оно и следующие 4 числа – харшад.

Читателям предлагается самостоятельно убедиться в том, что таким же способом можно построить ряд из 10 последовательных  $X$ -чисел. Единственная оговорка состоит в том, что здесь число 30 уже не годится в качестве опорного: оно слишком мало, и делимость сразу на все нужные делители не получится. Однако числа 120 уже достаточно.

**Задача 1.** Найдите 10 подряд идущих  $X$ -чисел, исходя из опорного числа 120.

*Замечание.* Для пяти чисел можно поступить и проще, а именно, умножить 52173 на 3. Получается 156519 – сумма цифр как раз 27.

Этот способ предпочтительнее в том смысле, что  $X$ -числа получаются примерно в 300 раз меньше (первое – 15651900030). Но его слабое место в том, что не видно гарантии, что подходящий множитель всегда удастся подобрать (строго говоря, первый способ тоже полной гарантии не дает, но там есть, так сказать, 99%-я гарантия). Так что если вам, читатели, придется решать сходную задачу, то вот совет – сначала попробовать второй способ: подобрать подходящий множитель. А если не удастся – применяйте первый.

**Задача 2.** Найдите 6 подряд идущих  $X$ -чисел, исходя из опорного числа 20.

Итак, ряд длины 10 получить можно. А еще длиннее? Может быть, существует ряд любой длины? Нет.

**Утверждение 3.** *Не может стоять подряд более 20  $X$ -чисел.*

Для доказательства разобьем натуральный ряд на сотни, причем каждую сотню будем отсчитывать от  $A00$  до  $A99$  ( $A$  – любой набор цифр), т.е. в каждой сотне совпадают все цифры, кроме двух последних.

**Лемма.** *В сотне не может стоять более 11  $X$ -чисел подряд.*

В самом деле, пусть  $N$  – одно из наших чисел,  $S(N)$  – сумма его цифр. Как правило, выполняется равенство  $S(N) = S(N + 9)$ . Если так, то  $S(N)$  должно быть также делителем разности этих чисел, т.е. делителем 9. Если, сверх того,  $N$  не делится на 3, то это означает, что  $S(N) = 1$ , а этот случай заведомо не годится.

Остается сообразить, что это рассуждение проходит для любых 12 чисел подряд в одной сотне. Действительно, среди 12 чисел есть три пары, различающиеся на 9, и легко сообразить, что как минимум для одной рассуждение проходит.

Из сказанного пока следует только, что не может стоять подряд более 22 чисел харшад. Но наше рассуждение нетрудно усилить.

Назовем «перескоком» место перехода от одной сотни к другой, т.е. место между числами  $A99$  и  $(A+1)00$ . Допустим, что подряд стоит более 11 чисел; из сказанного видно, что они обязаны стоять на перескоке. Допустим, что их 21 или более, тогда либо до, либо после перескока стоит не менее 11 чисел. Но этого быть не может. В самом деле,

если эти 11 чисел стоят до перескока, то это числа от  $A89$  до  $A99$ ; но тогда  $S(A89) = S(A98)$  – сумма цифр одинаковая и заведомо больше 9 – следовательно, они оба не могут быть  $X$ -числами.

Допустим теперь, что 11 чисел стоят после перескока, т.е. от  $(A+1)00$  до  $(A+1)10$ . Тогда  $S((A+1)01) = S((A+1)10)$  – следовательно, сумма должна быть равна либо 3, либо 9.

Но если  $S = 3$ , то  $S((A+1)08) = 10$ , а это число на 10 не делится – противоречие. Случай  $S = 9$  аналогичен.

Впрочем, очень длинный ряд все же получить можно, но только с помощью жюльничества. А именно, видоизменим нашу задачу: выберем произвольное натуральное  $q > 1$  и будем рассматривать  $q$ - $X$  числа, т.е. числа, которые больше  $q^2$  и которые делятся на сумму своих цифр, *записанную в  $q$ -ичной системе*.

### Примеры

**2.** Число 10 является 3- $X$  числом, поскольку в троичной системе оно записывается как 101 и притом делится на 2.

**3.** Число 231 является 11- $X$  числом, поскольку в одиннадцатеричной системе его сумма цифр равна 11, и оно делится на 11. (В самом деле,  $231 = 121 + 10 \cdot 11$  – в одиннадцатеричной системе имеет вид  $1[10]0$ ).

**Задача 3.** Докажите, что для любого  $n$  существует такое  $q$ , что в  $q$ -ичной системе существует  $n$  подряд  $q$ - $X$  чисел.

**Задача 4.** а) Докажите, что в двоичной системе не может стоять подряд 5 чисел харшад.

б) Постройте подряд 4 таких числа.

Вернемся, однако, к числам в десятичной записи. Как мы видели, максимальная длина ряда – 20. Можно ли усилить эту оценку, например доказать, что длина не больше 19?

Оказывается, ответ отрицательный: построить 20 чисел харшад подряд можно, но трудно. Это сделано с помощью компьютера, причем числа в примере насчитывают более 40 миллиардов цифр (!). Мы попробуем обойтись без компьютера и потому ограничимся тем, что наметим способ построить подряд 11 чисел харшад.

В качестве опорного числа примем 800, причем (маленькая хитрость) будем считать, что это сумма цифр *второго* числа

ряда. Наши одиннадцать чисел, таким образом, имеют следующий вид:

$$A799, A800, A801, \dots, A809.$$

При этом предполагается, что сумма цифр числа  $A$  равна 792. В таком случае суммы цифр нашего ряда равны соответственно 817, 800, 801, ..., 809.

Далее необходимо найти число, которое делится на все необходимые числа от 800 до 809 (как мы уже знаем, надо взять НОК этих чисел, но некоторые множители – например, двойки – можно отбросить) и, сверх того, дает нужный остаток от деления на 817.

Поскольку число  $817 = 19 \cdot 43$  взаимно просто с числами от 800 до 809, китайская теорема об остатках гарантирует, что такое число  $A$  существует. При этом сумма его цифр еще не слишком велика; она существенно меньше 792, и потому нужно слева от  $A$  приписать еще одно число  $B$ , которое уже делится на все те же числа и сверх того на 817. Искомое число, таким образом, имеет вид  $BA$  (это не произведение, а два числа, записанные подряд; правильнее, таким образом, было бы писать  $B \cdot 10^r + A$ ), а второе число нашего ряда –  $BA800$ .

Подобрать нужные числа  $A$ ,  $B$  нелегко, но можно. Главная трудность, пожалуй, заключается в том, что число с суммой цифр 800 (и более) должно иметь как минимум сто цифр; автору удалось довести этот труд до конца (и даже вручную!), но приводить соответствующий пример здесь вряд ли стоит.

Заметим еще, что, взяв за опорное число 800, мы уже не сможем продлить этот ряд. В самом деле, продлить его вправо (на число ...810) невозможно, как было показано при доказательстве утверждения 3. Если же мы попытаемся его продлить влево, т.е. дописать к нему число ...798, то сумма цифр такого числа должна равняться 816, тогда как число ...98 не делится даже на 4.

### Доля $X$ -чисел

Займемся теперь другим вопросом, а именно: много ли существует чисел харшад?

Понятно, разумеется, что их бесконечно много, но ведь и бесконечность бывает разная: к примеру, полных кубов меньше, чем полных квадратов, а квадратов значительно меньше, чем простых чисел. (Замечание: второе неочевидно, хотя и верно; первое же вполне очевидно, но... подумайте сами, как

придать этому утверждению точный математический смысл.)

Естественная постановка задачи такова: выберем произвольное  $N$ , и пусть  $M = M(N)$  – количество  $X$ -чисел, меньших  $N$ . Чему равен предел отношения  $M/N$ , когда  $N$  стремится к бесконечности?

**Утверждение 4.** *Предел отношения  $M/N$  равен 0.*

Докажем, например, что для достаточно больших  $N$  доля  $X$ -чисел среди первых  $N$  меньше  $10^{-4}$ .

Для этого выберем достаточно большое  $N$  и разобьем все числа от 101 до  $N$  на миллионы; при этом каждый миллион мы будем считать от A000000 до A999999 (в каждом миллионе все цифры совпадают, кроме последних шести; правда, при таком счете в первом миллионе получается на сто одно число меньше, но это неважно).

Пусть  $S$  – сумма цифр числа  $A$ . Тогда, очевидно, в выбранном миллионе любое число имеет сумму цифр от  $S$  до  $S + 54$  – есть ровно 55 разных значений.

Теперь разобьем все миллионы на две группы: те, в которых  $S < 1\,000\,000$ , и все остальные. Сколько именно  $X$ -чисел в миллионах первого рода, неясно (вполне возможно, что довольно много; например, нетрудно доказать, что в первом миллионе более десяти тысяч  $X$ -чисел, причем и эта оценка довольно грубая). Но на наше счастье, нам не нужно этого знать, поскольку *миллионов первого рода мало*: если, например,  $N > 10^{10^9}$ , т.е. соответствующие числа имеют до миллиарда цифр, то ясно, что почти всегда сумма цифр  $A$  намного больше миллиона (читателям предлагается самостоятельно оценить долю «малых» миллионов).

С другой стороны, если наш миллион – второго рода, то в нем не более 55  $X$ -чисел. В самом деле, поскольку любая сумма цифр  $R$  больше миллиона, то числа, делящиеся на  $R$ , встречаются с интервалом больше миллиона, так что в наш миллион попадает, самое большое, одно из них (причем нам даже нет надобности учитывать условие харшад). Итак, почти в каждом миллионе не более 55  $X$ -чисел, соответственно, их доля не больше  $55/10^6$ , что и требовалось.

Чтобы закончить доказательство, надо проделать аналогичную операцию для любо-

го другого, сколь угодно малого числа – что читатель сделает без труда.

Видно также и другое: для этого необходимо брать чудовищно большие  $N$ . Можно сказать, что доля  $X$ -чисел хотя и стремится к нулю, но стремится очень медленно, «на глазок» – как  $1/\ln N$ . В действительности так оно и есть, но доказательство этого факта уже выходит за рамки элементарной математики.

Еще раз видоизменим задачу и будем рассматривать только числа с заданной суммой цифр  $r$ . Какова будет доля  $X$ -чисел (или, попросту говоря, доля чисел, делящихся на  $r$ ) среди них?

Здесь, разумеется, картина совершенно иная: например, если  $r$  равно единице, трем или девяти, то ВСЕ рассматриваемые числа – харшад.

Для других  $r$  это не так, но тем не менее вполне вероятно, что их доля велика.

Итак, пусть опять задано произвольное  $N$ . Чтобы облегчить дело, отбросим условие, что наши числа больше 100, – ясно, что при этом предел не изменится, а расчеты немножко упрощаются. Пусть  $P_r = P(N, r)$  – количество чисел, меньших  $N$  и с суммой цифр  $r$ , а  $M_r = M(N, r)$  – количество  $X$ -чисел среди них. Мы вновь будем искать предел отношения  $M_r/P_r$ , который мы обозначим через  $L(r)$ .

**Пример 4.** Если  $r = 2$ , то  $L(2) = \lim M_2/P_2 = 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим все числа, имеющие не более  $n$  знаков и с суммой цифр 2. Это, во-первых, числа вида  $200\dots 0$  (число нулей – от 0 до  $n - 1$ , причем все эти числа – харшад), и во-вторых, числа вида  $100\dots 0100\dots 0$ . Чисел второго вида имеется  $C_n^2$ , и не-харшад среди них – только те, у которых вторая единица стоит на последнем месте. Таких всего лишь  $(n - 1)$ . Таким образом, всего чисел с суммой цифр два имеется  $n + C_n^2$ , а количество  $X$ -чисел среди них равно  $n + C_n^2 - (n - 1) = C_n^2 + 1$ . Ясно, что  $L(2) = 1$ .

Заметим теперь, что такое же доказательство, лишь с несущественными изменениями, проходит для всех чисел вида  $2^k 5^l$ . Действительно, раз цифр очень много, а сумма их фиксирована, то это бесспорно означает, что почти все цифры равны 0, и

кроме того, означает, что несколько последних цифр, скорее всего, равны нулю (доля чисел, для которых это не так, стремится к 0). Но тогда «почти все» наши числа делятся на степень десятки, и тем более делятся на  $2^k 5^l$ .

**Утверждение 5.** Для любого  $r$  предел  $L(r)$  существует, и он больше 0.

**Набросок доказательства.** Рассмотрим все  $n$ -значные числа для достаточно большого  $n$ . Почти все такие числа с суммой цифр  $r$  имеют вид  $00\dots 0100\dots 01\dots 0100\dots 0$ . Общее количество таких чисел равно  $\binom{n}{r}$ . Некоторые из них являются  $X$ -числами — это те, у которых единицы стоят на «правильных» местах. Доля «правильных» расстановок не зависит от  $n$ . Соответственно, можно вычислить предел, и он больше нуля.

Мы разобрались с числами 3, 9 и  $2^k 5^l$ . А как быть с другими числами? Займемся, например, первой дюжиной.

Как мы видели,  $L(r) = 1$  для  $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12$ . (Например, для того чтобы число с суммой цифр 12 было харшад, достаточно, чтобы оно заканчивалось двумя нулями, а это, как сказано выше, бывает «почти всегда».) Таким образом, остаются только числа 7 и 11, для которых получаются довольно содержательные задачи. Мы ограничимся разбором случая  $r = 11$ .

Как уже сказано, если количество цифр достаточно велико («стремится к бесконечности»), то почти все числа с суммой цифр  $r$  имеют вид  $00\dots 0100\dots 01\dots 100\dots 0$  ( $r$  единиц на разных местах и помногу нулей между ними). Это верно и для  $r = 11$ .

Назовем цифру числа «четной» (в кавычках), если она стоит на четном по счету месте (и вне зависимости от того, какая это цифра). Соответственно, назовем ее «нечетной», если она стоит на нечетном месте.

Хорошо известен признак делимости на 11: число делится на 11, либо если сумма всех его «четных» цифр равна сумме «нечетных», либо если разность между этими суммами сама делится на 11. Поскольку у нас сумма всех цифр равна 11, т.е. нечетна, то первый случай исключается, а второй возможен только, если все 11 ненулевых цифр «одинаковы», т.е. стоят только на четных местах или только на нечетных. Но вероятность такого распределения составляет  $2^{-11}$  для каждого из этих двух случаев, а суммар-

но она равна  $2^{-10}$ , т.е. немного меньше чем 0,001.

Рассуждение с «вероятностью», разумеется, нестрогое. Строгое доказательство выглядит так: всего 11 цифр на разных местах можно расставить  $C_n^{11}$  способами, тогда как на четных местах их можно расставить  $C_{n/2}^{11}$  способами (если  $n$  четно; для нечетного  $n$  придется еще писать ответы отдельно для четных и нечетных цифр, но на окончательный ответ это не влияет). Легко проверить, что отношение этих чисел при больших  $n$  стремится как раз к  $2^{-11}$ .

Окончательно имеем:  $L(11) = 1/1024$ .

*Замечание.* Этот ответ (получилось очень маленькое число) нетипичен. Например, если вместо 11 взять  $2 \cdot 11 = 22$ , то предел сразу станет намного больше. А именно,  $L(22) \approx 1/6$  (попробуйте сами найти это число). Смотрите также ниже задачи 7 и 9.

### Другие задачи

Выше было показано, что в одном десятке может быть сколько угодно  $X$ -чисел — даже все 10. С другой стороны, было показано, что в сотне непременно есть числа не харшад.

**Задача 5.** Каково может быть максимальное число  $X$ -чисел в одной сотне:

а) если сотню мы считаем непременно от  $\dots 00$  до  $\dots 99$ ;

б) в общем случае: если сотня считается от некоторого  $k$  до  $k + 99$ ?

**Задача 6.** Оцените количество  $X$ -чисел в первом миллионе. А именно:

а) докажите, что в нем более 10000  $X$ -чисел;

б) дайте какую-нибудь оценку сверху: «чисел харшад не более какого-то числа».

**Задача 7.** Найдите  $L(7)$ .

Говорят, что простое число  $p$  имеет полный цикл, если период десятичной дроби  $1/p$  имеет  $(p-1)$  знаков. Из чисел от 1 до 40 такими числами являются 7, 17, 19, 23, 29 (но не 11, 13, 31, 37). К примеру:

$$1/7 = 0,(142857) \text{ или}$$

$$1/17 = 0,(0588235294117647).$$

**Задача 8.** Найдите  $L(p)$  в предположении, что  $p$  имеет полный цикл.

**Задача 9.** Докажите, что  $L(27) = 1/3$ .

**Задача 10.** Докажите, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует лишь конечное число простых чисел  $p$  таких, что  $|pS(p) - 1| > \varepsilon$ .

## LXI

# Международная математическая олимпиада

Очередная международная олимпиада (ИМО) должна была пройти в июле 2020 года в Санкт-Петербурге, но из-за пандемии сроки олимпиады сдвинулись на 18–28 сентября и формат вынужденно претерпел изменения. К сожалению, участников невозможно было собрать вместе, поэтому во всех странах, участвующих в ИМО, были организованы специальные экзаменационные центры (оборудованные видеонаблюдением), где 21 и 22 сентября проводились два тура олимпиады. Несмотря на разницу в часовых поясах, туры прошли во всех странах «почти одновременно», так что самое позднее начало тура предшествовало самому раннему концу тура. Участников Олимпиады было 616, из 105 стран. Центральный оргкомитет олимпиады располагался в Санкт-Петербурге на базе РГПУ им.А.И.Герцена.

В команду России этого года вошли: *Данила Демин* (Сочи), *Алексей Львов* (Новосибирск), *Максим Туревский* (Санкт-Петербург), *Антон Садовничий* (Москва), *Данил Сибгатуллин* (Казань, Москва), *Иван Гайдай-Турлов* (Москва).

Результаты наших участников показаны в таблице.



Слева направо. Д.Демин, М.Туревский, А.Львов, И.Гайдай-Турлов, Д.Сибгатуллин, А.Садовничий

Сборная России стала второй в общекомандном рейтинге. На первом месте – сборная Китая, третье место – у команды США. Подробные результаты можно найти на официальном сайте олимпиады <http://imo-official.com>.

На финальной стадии подготовки сборной большой вклад внесли математики и педагоги: К.Сухов (руководил процессом подготовки), В.Брагин, Б.Баев, А.Кушнир, А.Кузнецов, П.Козлов, Н.Власова, М.Пратусевич, К.Кноп и многие другие. Отметим с благодарностью большую помощь и поддержку в организационных и содержательных вопросах подготовки команды, которую оказали Образовательный центр «Сириус» (Сочи), Центр педагогического мастерства (Москва), Президентский физико-математический лицей № 239 (Санкт-Петербург), Математический институт РАН (Москва, Санкт-Петербург).

| Участник           | Баллы по задачам |   |   |   |   |   | Итог | Награда           |
|--------------------|------------------|---|---|---|---|---|------|-------------------|
|                    | 1                | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |      |                   |
| Демин Данила       | 7                | 7 | 7 | 7 | 7 | 1 | 36   | Золотая медаль    |
| Львов Алексей      | 7                | 7 | 7 | 7 | 7 | 1 | 36   | Золотая медаль    |
| Туревский Максим   | 7                | 1 | 7 | 7 | 7 | 1 | 30   | Серебряная медаль |
| Садовничий Антон   | 7                | 7 | 0 | 7 | 7 | 1 | 29   | Серебряная медаль |
| Сибгатуллин Данил  | 7                | 7 | 0 | 7 | 7 | 1 | 29   | Серебряная медаль |
| Гайдай-Турлов Иван | 7                | 2 | 7 | 7 | 1 | 1 | 25   | Серебряная медаль |



### Задачи олимпиады

1. Внутри выпуклого четырехугольника  $ABCD$  нашлась точка  $P$  такая, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \\ = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC. \end{aligned}$$

Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов  $ADP$  и  $PCB$  и серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ .

*Польша*

2. Даны вещественные числа  $a, b, c, d$  такие, что  $a \geq b \geq c \geq d > 0$  и  $a + b + c + d = 1$ . Докажите, что

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

*Бельгия*

3. Имеется  $4n$  камушков массаи 1, 2, 3, ...,  $4n$ . Каждый из камушков покрашен в один из  $n$  цветов, причем имеется по 4 камушка каждого цвета. Докажите, что камушки можно разделить на две кучи равного суммарного веса так, чтобы в каждой куче было по два камушка каждого цвета.

*Венгрия*

4. Дано целое число  $n > 1$ . На горном склоне расположены  $n^2$  фуникулерных станций на разных высотах. Каждая из двух фуникулерных компаний  $A$  и  $B$  владеет  $k$  подъемниками. Каждый подъемник осуществляет регулярный беспересадочный трансфер с одной из станций на другую, более высоко расположенную станцию. Известно, что:  $k$  трансферов компании  $A$  начинаются на  $k$  различных станциях; также они закан-

чиваются на  $k$  различных станциях; при этом трансфер, который начинается выше, и заканчивается выше. Те же условия выполнены для компании  $B$ . Будем говорить, что две станции *связаны* фуникулерной компанией, если можно добраться из нижней станции в верхнюю, используя один или несколько трансферов данной компании (другие перемещения между станциями запрещены). Найдите наименьшее  $k$ , при котором заведомо найдутся две станции, связанные обеими компаниями.

*Индия*

5. Имеется  $n > 1$  карточек, на каждой из которых написано целое положительное число. Оказалось, что для любых двух карточек среднее арифметическое написанных на них чисел равно среднему геометрическому чисел, написанных на карточках некоторого набора, состоящего из одной или более карточек. При каких  $n$  из этого следует, что все числа, написанные на карточках, равны?

*Эстония*

6. Докажите, что существует положительная константа  $c$ , для которой выполняется следующее утверждение:

Пусть  $S$  — множество из  $n > 1$  точек плоскости, в котором расстояние между любыми двумя точками не меньше 1. Тогда существует прямая  $l$ , разделяющая множество  $S$ , такая, что расстояние от любой точки  $S$  до  $l$  не меньше чем  $cn^{-1/3}$ .

(Прямая  $l$  разделяет множество точек  $S$ , если она пересекает некоторый отрезок, концы которого принадлежат  $S$ .)

*Замечание.* Более слабые результаты с заменой  $cn^{-1/3}$  на  $cn^{-\alpha}$  могут оцениваться в зависимости от значения константы  $\alpha > 1/3$ .

*Тайвань*

*Публикацию подготовили К.Сухов, В.Брагин, А.Кушнир, П.Кожевников*

# Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций**

## МАТЕМАТИКА

**1** (9 кл.). Расстояния от пункта  $A$  до пункта  $B$  по реке и по протоку одинаковы и равны 1 км (рис.1). Скорость течения в протоке равна  $V$  км/ч, а в реке  $(2V + 1)$  км/ч.

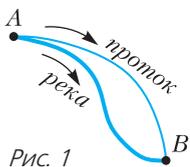


Рис. 1

Течение и в реке, и в протоке направлено от  $A$  к  $B$ . Если к разности времен движения катера по протоку из  $B$  в  $A$  и обратно по протоку прибавить время движения плота по реке из  $A$  в  $B$ , то получится ровно 1 час. На сколько километров в час скорость катера больше скорости течения в протоке? Значение  $V$  не дано. В ответе должно получиться число.

**2** (9, 10, 11 кл.). Восемь чисел  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и  $b_1, b_2, b_3, b_4$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1, \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0, \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0, \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что  $a_2b_3 = 7$ . Найдите  $a_4b_4$ .

**3** (9, 10, 11 кл.). Решите уравнение  $2^x + 2^y = 6^t$  в целых числах.

**4** (9 кл.). Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность радиуса  $R$  (рис.2). Известно, что  $\angle B = 110^\circ$ ,  $\angle E = 100^\circ$ . Найдите сторону  $CD$ .

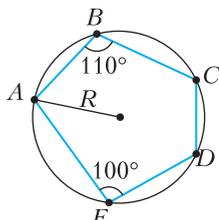


Рис. 2

**5** (9 кл.). Пусть  $O$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Найдите длину медианы, проведенной из вершины  $A$ , если  $\angle BAC = 35^\circ$ ,  $\angle BOC = 145^\circ$ ,  $BC = a$ .

**6** (9, 10 кл.). Найдите площадь треугольника  $ABC$  вершины которого имеют координаты  $A(0; 0)$ ,  $B(1424233; 2848467)$ ,  $C(1424234; 2848469)$ . Ответ округлите до сотых.

**7** (9, 10, 11 кл.). Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1, 2. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

**8** (9, 10 кл.). На декартовой плоскости рассмотрим окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат. Укажите хотя бы одно значение  $R$ , при котором на такой окружности лежат ровно 32 целочисленные точки (точку называют целочисленной, если ее абсцисса и ордината – целые числа).

*Указание.* Натуральное число  $x$  представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда все простые числа (кроме 2), входящие в разложение числа  $x$  в нечетной степени, имеют вид  $4k + 1$  для некоторых целых  $k$ . В частности, в виде суммы двух квадратов представимо любое простое число, дающее остаток 1 при делении на 4. Если каждое из чисел  $a$  и  $b$  представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения.

**9** (10 кл.). Решите уравнение

$$\sin^3 x + 6 \cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

**10** (10 кл.). В вершинах квадрата со стороной 4 расположены четыре города. Эти города надо соединить дорогами так, чтобы из любого города можно было по ним добраться в любой. Предложите хоть один вариант таких дорог, общей длиной *менее* 11.

*Указание.* При решении задачи может оказаться полезным следующее утверждение (которое допустимо использовать без доказательства). Пусть внутренние углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ . Сумма расстояний  $AT + BT + CT$  от точки  $T$  до вершин треугольника минимальна, если из точки  $T$  стороны треугольника видны под

углом  $120^\circ$  ( $T$  – точка Торричелли треугольника). Если же один из углов треугольника больше или равен  $120^\circ$ , то точкой минимума суммы расстояний будет вершина этого угла.

**11** (10 кл.). В остроугольном треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  выбрана точка  $Q$  так, что  $AQ:QC = 1:2$ . Из точки  $Q$  опущены перпендикуляры  $QM$  и  $QK$  на стороны  $AB$  и  $BC$  соответственно. При этом  $BM:MA = 4:1$ ,  $BK = KC$ . Найдите  $MK:AC$

**12** (11 кл.). Решите неравенство

$$2^{\log_2^2 x} - 12x^{\log_{0.5} x} < 3 - \log_{3-x}(x^2 - 6x + 9).$$

**13** (11 кл.). Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2t}{1+t^2}} + 3\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 1.$$

**14** (11 кл.). Основанием пирамиды  $TABCD$  является трапеция  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ). Расстояния от точек  $A$  и  $B$  до плоскости  $TCD$  равны  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Площадь треугольника  $TCD$  равна  $S$ . Найдите объем пирамиды  $TABCD$ .

**15** (11 кл.). Дан треугольник  $ABC$ . На стороне  $AC$  выбирают точку  $Q$  таким образом, чтобы длина отрезка  $MK$  где  $M$  и  $K$  – основания перпендикуляров, опущенных из точки  $Q$  на стороны  $AB$  и  $BC$  соответственно, оказалась минимальной. При этом  $QM = 1$ ,  $QK = \sqrt{2}$ ,  $\angle B = 45^\circ$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**16** (11 кл.). Найдите все неотрицательные целые числа  $a$  и  $b$ , удовлетворяющие равенству  $a^2 + b^2 = 841 \cdot (ab + 1)$ .

## Ф И З И К А

### 8 класс

**1.** Велосипедист проехал первую треть пути со скоростью  $v_1$ , а оставшуюся часть с какой-то другой скоростью. Найдите эту скорость, если известно, что средняя скорость его движения на всем пути равна  $v_{\text{ср}}$ . (20 баллов)

**2.** Невесомый рычаг, длина которого  $l$  (рис.3), находится в равновесии. На каком расстоянии от оси вращения (т.О) подвешен

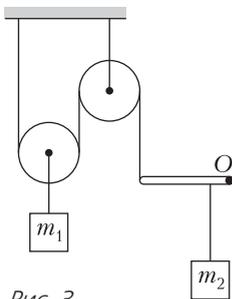


Рис. 3

второй груз? Массы грузов равны  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. (20 б.)

**3.** Жидкостной барометр наполнен машинным маслом плотностью  $\rho_m$ . Какой высоты был столб масла в этом барометре при нормальном атмосферном давлении  $p_a$ ? (20 б.)

**4.** Два шара массами  $M$  и  $m$  ( $M > m$ ), имеющих одинаковые объемы, связали невесомой и нерастяжимой нитью и опустили в сосуд с жидкостью. «Легкий» шар всплыл так, что в жидкости осталась лишь его  $\eta$ -я часть. «Тяжелый» шар, не касаясь дна, повис на вертикально ориентированной нити. Найдите силу натяжения нити  $F$ , считая, что плотность жидкости неизменна от поверхности жидкости до дна сосуда. (20 б.)

**5.** Какое количество теплоты  $Q$  нужно сообщить  $m = 2,0$  кг льда, взятого при температуре  $t_{\text{л}} = -10^\circ\text{C}$ , чтобы лед расплавить ( $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$ ), а полученную воду нагреть до кипения ( $t_{\text{к}} = 100^\circ\text{C}$ ) и выпарить? Удельная теплоемкость льда  $c_{\text{л}} = 2,10 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), удельная теплоемкость воды  $c_{\text{в}} = 4,19 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда  $\lambda_{\text{л}} = 3,35 \cdot 10^5$  Дж/кг, удельная теплота парообразования воды  $r_{\text{в}} = 22,60 \cdot 10^5$  Дж/кг. (20 б.)

### 9 класс

**1.** См. задачу 4 для 8 класса. (15 баллов)

**2.** В закрытом с обоих концов теплоизолированном горизонтально расположенном цилиндре есть тонкий теплопроводящий невесомый поршень, делящий цилиндр на две части и могущий двигаться без трения. В одной части цилиндра находится молекулярный водород массой  $m_{\text{в}} = 3$  г. В другой части цилиндра находится молекулярный кислород массой  $m_{\text{к}} = 16$  г. Найдите отношение объемов  $\eta = V_{\text{в}}/V_{\text{к}}$ , занимаемых этими газами. Молярные массы газов  $M_{\text{в}} = 2$  г/моль и  $M_{\text{к}} = 32$  г/моль. (15 б.)

**3.** См. задачу 5 для 8 класса. (15 б.)

**4.** На горизонтальной поверхности стола покоится доска массой  $M$ , а на горизонтальной верхней поверхности этой доски покоится другая доска массой  $m$ . Коэффициент трения скольжения между досками равен  $\mu$ , коэффициент трения скольжения между нижней доской и столом равен нулю. К верхней доске приложили горизонтальную силу  $F$  (рис.4).

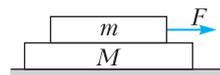


Рис. 4

Найдите ускорения  $a_n$  и  $a_v$  (нижней и верхней) досок и силу трения  $F_{тр}$ , возникающую между досками. (25 б.)

5. КПД цикла  $1-2-3-1$ , состоящего из процесса  $1-2$  с линейной зависимостью давления от объема, адиабаты  $2-3$  и изотермы  $3-1$ , равен  $\eta_1$ . КПД цикла  $1-3-4-1$ , состоящего из изотермы  $1-3$ , изобары  $3-4$  и адиабаты  $4-1$ , равен  $\eta_2$ . Чему равен КПД  $\eta$  цикла  $1-2-3-4-1$ ? Рабочим веществом тепловой машины является идеальный газ. Циклы показаны на рисунке 5. (30 б.)

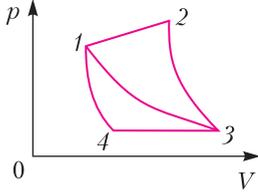


Рис. 5

10 класс

1. См. задачу 2 для 9 класса. (20 баллов)

2. Стальной шарик массой  $m$  подвешен к потолку на легкой пружине жесткостью  $k$ . Его первоначально удерживают так, что пружина не растянута, а затем отпускают. Найдите среднюю скорость шарика при движении до остановки. Ускорение свободного падения равно  $g$ . (20 б.)

3. См. задачу 4 для 9 класса. (20 б.)

4. Бусинка с положительным зарядом  $Q > 0$  и массой  $m$  скользит по гладкой горизонтальной направляющей длиной  $2l$ , на концах которой находятся положительные заряды  $q > 0$  (рис.6). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен  $T$ . Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 4 раза? Считайте, что смещение бусинки относительно положения равновесия очень мало. (20 б.)

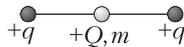


Рис. 6

5. Проводящий стержень массой  $m$  и длиной  $L$  подвешен горизонтально на двух легких проводящих проводах длиной  $L_0$  в вертикальном магнитном поле с индукцией  $B$  (рис.7). К точкам закрепления проводов подключают конденсатор емкостью  $C$ , заряженный до разности потенциалов  $U$ . В некоторый момент замыкают ключ  $K$  и конденсатор начинает разря-

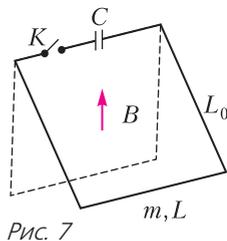


Рис. 7

жаться через проводящий стержень. Определите максимальный угол отклонения системы от положения равновесия после замыкания ключа. Считайте, что разряд происходит за очень малое время. (20 б.)

11 класс

1. Два тела массами  $m$  и  $nm$ , соединенные невесомой и нерастяжимой нитью, лежат на горизонтальной плоскости. В начальный момент времени нить не провисает. Коэффициент трения между телами и плоскостью равен  $\mu$ . К левому телу прикладывают постоянную горизонтальную силу  $F$ , направленную влево. К правому телу прикладывают линейно возрастающую горизонтальную силу  $F' = kt$ , направленную вправо. Найдите скорость движения системы  $v$  в момент времени  $t_0$ . Постоянные величины имеют следующие значения:  $F = 4$  Н,  $m = 1$  кг,  $n = 2$ ,  $\mu = 0,1$ ,  $k = 0,5$  Н/с,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $t_0 = 10$  с. (20 баллов)

2. На горизонтальной пружине с жесткостью  $k$  закреплено тонкое колесико, которое без проскальзывания может катиться по горизонтальной поверхности (рис.8). Вся масса колесика  $m$  сосредоточена на его ободе, спицы невесомы. Определите частоту малых колебаний такой системы. (20 б.)

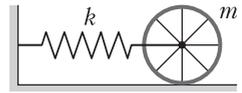


Рис. 8

3. См. задачу 4 для 10 класса. (20 б.)

4. См. задачу 5 для 9 класса. (20 б.)

5. Два одинаковых проволочных кольца радиусом  $R$  движутся поступательно в одной плоскости навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры, в однородном магнитном поле с индукцией, равной  $B$  и направленной перпендикулярно плоскости колец (рис.9). Найдите направления и модули сил, действующих на каждое кольцо со стороны магнитного поля, в тот момент, когда скорости колец равны  $v$ , а центральный угол, стороны которого проходят через

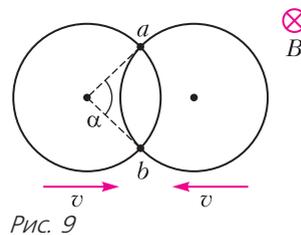


Рис. 9

точки касания колец  $a$  и  $b$ , равен  $\alpha$ . В точках касания колец  $a$  и  $b$  имеется хороший электрический контакт. Электрическое сопротивление проволоки кольца, длина которой равна длине окружности кольца, равно  $r$ . Индуктивностями колец пренебречь. (20 б.)

## МАТЕМАТИКА И КРИПТОГРАФИЯ

**1** (8–9, 10 классы). На билетах в кинотеатры Криптоландии проставляется шестизначный номер от  $(0,0,0,0,0,0)$  до  $(8,8,8,8,8,8)$ . При этом используются только цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Билет считается «счастливым», если остатки от деления на 9 суммы первых трех цифр и суммы последних трех цифр отличаются на фиксированное число  $k = 2$ . Например, билеты с номерами 123026 и 123661 – счастливые, а с номерами 123000 и 876111 – нет. Найдите число счастливых билетов.

**2** (8–11 кл.). Известно, что  $p, p_1, p_2, p_3$  – различные простые числа и  $p^3 - 2p^2 - 16p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 - 32$ . Найдите все такие числа  $p, p_1, p_2, p_3$ . Ответ обоснуйте.

**3** (8–9, 10 кл.). Сообщение передается в виде таблицы  $7 \times 7$  клеток (рис.10). В каж-

|          |   |   |          |          |   |          |
|----------|---|---|----------|----------|---|----------|
| <b>3</b> | с | з | <b>4</b> | е        | м | <b>3</b> |
| ю        | с | е | р        | д        | е | у        |
| ш        | в | в | н        | <b>2</b> | ь | <b>5</b> |
| о        | г | д | р        | б        | о | ф        |
| а        | а | о | к        | д        | х | л        |
| я        | ж | н | т        | ц        | и | у        |
| <b>1</b> | я | к | <b>2</b> | т        | е | <b>2</b> |

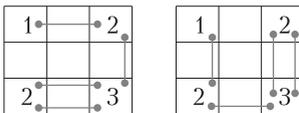


Рис. 10

дой клетке записана либо буква, либо цифра. Чтобы прочитать сообщение, необходимо зачеркнуть отрезками лишние символы. Отрезки проводят по следующим правилам (см. примеры на рисунке): 1) концы отрезков лежат только в клетках с цифрами, причем цифра показывает, сколько концов

в этой клетке лежит, 2) отрезки могут проходить только горизонтально или вертикально, 3) две цифры могут быть соединены не более чем двумя отрезками. Прочитайте сообщение, которое получается выписыванием каждой третьей незачеркнутой буквы.

**4** (8–9, 10 кл.). Для зашифрования сообщения каждая его буква заменяется числом по таблице (рис.11). В результате получает-

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| А  | Б  | В  | Г  | Д  | Е  | Ё  | Ж  | З  | И  | Й  | К  | Л  | М  | Н  | О  |    |
| 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |    |    |
| П  | Р  | С  | Т  | У  | Ф  | Х  | Ц  | Ч  | Ш  | Щ  | Ъ  | Ы  | Ь  | Э  | Ю  | Я  |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

Рис. 11

ся числовая последовательность  $x_1, \dots, x_n$ . Затем вырабатывают последовательность  $y_1, y_2, \dots$  по следующему правилу:  $y_1$  – некоторое натуральное число,  $y_2$  – сумма цифр квадрата  $y_1$ , увеличенная на 1, и т.д. Например, если  $y_1 = 7$ , то  $y_2 = 14$ ,  $y_3 = 17$  и т.д. После этого выбирается некоторое натуральное  $t$  и формируется зашифрованное сообщение по такому правилу:  $r_{32}(x_1 + y_t), \dots, r_{32}(x_n + y_{t+n-1})$ , где  $r_{32}(a)$  – остаток от деления числа  $a$  на 32. Известно, что для  $y_1 = 2019$  и некоторого  $t$  получился следующий шифртекст: 10, 6, 26, 22, 15, 13, 20, 13, 29, 13, 28, 23, 4. Восстановите исходное сообщение.

**5** (8–11 кл.). Для зашифрования осмысленного слова его буквы переводят в числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  по таблице (см. рис.11). Затем выбирают натуральные числа  $x_0$  и  $k$ . Далее число  $x_0$  приписывают в начало последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а число  $x_{n+1} = x_0 + 19^{n+4}$  (где  $n$  – длина слова) – в ее конец. Получившаяся в результате последовательность  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  затем преобразуется в последовательность  $y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}$  по формуле  $y_i = r_{32}(x_i + 6x_i \cdot k^3 + k)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+1$ , где  $r_{32}(a)$  – остаток от деления числа  $a$  на 32. Затем числа заменяют буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **КЙЫЩНБНЦЛ**. Какое слово было зашифровано?

**6** (8–11 кл.). Каждому из четырех абонентов  $A_1, A_2, A_3, A_4$  надо выдать по два уравнения вида  $aw + bx + cy + dz = t$ , где  $a, b, c, d,$

$t, w, x, y, z \in \{0,1\}$ . Значения секретных битов  $w, x, y, z$  одинаковы для всех абонентов и им заранее неизвестны. Приведите хотя бы один пример уравнений, которые надо выдать этим четверем абонентам, чтобы каждая пара  $\{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}, \{A_2, A_3\}$  могла достоверно вычислить  $w, x, y, z$ , но чтобы при этом: 1) ни одна другая пара абонентов не могла достоверно вычислить более одного секретного бита; 2) ни один абонент в одиночку не был в состоянии достоверно вычислить даже один секретный бит. Например, абонент  $A_1$  получит уравнения  $\{w + x + y + z = 1; w + x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1\}$ , а  $A_2 - \{w + 0 \cdot x + y + 0 \cdot z = 0; w + x + 0 \cdot y + z = 0\}$ . Тогда, объединившись, из имеющихся в их распоряжении четырех уравнений они однозначно найдут, что  $w = 1, x = 0, y = 1, z = 1$ . При этом будем говорить, что пара абонентов  $\{A_1, A_2\}$  может *достоверно вычислить* секретные биты  $w, z, y, z$ . Здесь традиционно полагается, что  $1 + 1 = 0$ .

**7** (11 кл.). Саша решил отправить Маше записку. Для этого каждую букву сообщения он заменил комбинацией из 0 и 1 согласно таблице (А – 00000, Б – 00001, ..., Я – 11111; рис.12). Взяв день «Д» и номер месяца «М» своего рождения Саша вычислил  $u_1 = D^2 + M^2, u_2 = D \cdot M, u_3 = D - M$ . Далее Саша вычислил четвертое  $u_4 = r_{32}(u_1 + u_2u_3)$ , пятое  $u_5 = r_{32}(u_2 + u_3u_4)$ , ...,  $n$ -е число  $u_n = r_{32}(u_{n-3} + u_{n-2}u_{n-1})$ , где  $r_{32}(a)$  – остаток от деления числа  $a$  на 32. К  $i$ -му биту символу исходного сообщения (0 или 1) он прибавил число  $u_i$  и взял остаток от деления на 2. Полученную последовательность из 0 и 1 он вновь преобразовал в буквы по таблице и получил следующее сообщение: **ЖДУЛЩБШЛТВЩЦ**. Помогите Маше прочитать его.

**8** (11 кл.). Звук записывается на магнитный слой барабана (рис.13), который вра-

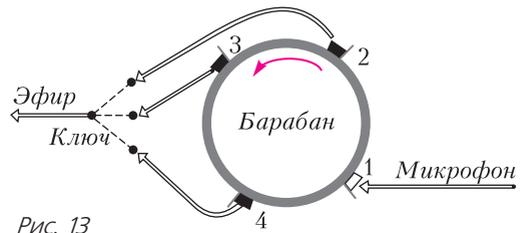


Рис. 13

щается с постоянной скоростью, совершая один оборот за 4 секунды. Рядом с барабаном по окружности через равные расстояния размещены записывающая (1) и три читающие головки (2), (3), (4). В каждый момент времени в телефонную линию передается сигнал с одной из читающих головок. Устройство спроектировано так, что каждый участок сигнала будет передан в линию один раз, а сама передача стартует, как только начало записи окажется у 3-й читающей головки. Сколько различных вариантов звука, переданного в линию, может получиться, если сообщение длилось 20 секунд?

**9** (11 кл.). Рассмотрим девять чисел  $k_1, \dots, k_9$ , где  $k_i \in \{0,1,2\}$ . При этом хотя бы одно число  $k_i$  отлично от нуля. С помощью этих чисел вырабатывают последовательность  $u_1, u_2, \dots, u_{2019}$  по формулам:  $u_1 = k_1, u_2 = k_2, \dots, u_9 = k_9, u_{i+9} = r_3(u_i + u_{i+1}), i = 1, 2, \dots, 2010$ , где  $r_3(a)$  – остаток от деления числа  $a$  на 3. Найдите такое наименьшее натуральное число  $l$ , что какие бы исходные числа  $k_1, \dots, k_9$  мы ни взяли, в последовательности  $u_1, u_2, \dots, u_l$  каждое из чисел 0, 1 и 2 гарантированно встретится хотя бы один раз.

*Публикацию подготовили:  
по математике, а также математике  
и криптографии – С.Рамоданов;  
по физике – М.Алексеев, В.Попов*

| А | Б | В | Г | Д | Е | Ж | З | И | Й | К | Л | М | Н | О | П | Р | С | Т | У | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Щ | Ъ | Ы | Ь | Э | Ю | Я |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Рис. 12

# Новосибирский государственный университет

## Ф И З И К А

### Олимпиада «Твой путь в настоящую науку»

#### I (отборочный) этап Интернет-тур

8 класс

1. Муравей двигался со скоростью  $1 \text{ см/с}$  вдоль сторон равностороннего треугольника, стартовав с середины одной из сторон. При этом каждый раз, дойдя до вершины, он задерживался на  $20 \text{ с}$  для поворота. Через  $240 \text{ с}$  после начала движения муравей остановился. Чему равно расстояние между начальной и конечной точками его движения, если длина стороны треугольника  $1 \text{ м}$ ?

2. На левом краю равноплечих весов на расстоянии  $L$  от их центра сидят гусеницы массами  $m_1$  и  $m_2$ . Они начинают движение вдоль весов вправо: первая со скоростью  $v_1$ , вторая со скоростью  $v_2$ . В некоторый момент весы приходят в равновесие. Через какое время от начала движения это произошло?

3. Два спортсмена бегут по стадиону в противоположных направлениях. Скорость одного из них постоянна и равна  $u$ , а скорость второго меняется каждый раз, когда они встречаются: либо с  $v_1$  на  $v_2$ , либо с  $v_2$  на  $v_1$ . Какова средняя скорость второго спортсмена (усредненная за большое время)?

4. В калорифере (нагревателе воды) вода объемом  $V = 2 \text{ л}$  нагревается от температуры  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  до температуры  $T_1 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$  за время  $t_0 = 200 \text{ с}$ . Какова будет температура воды  $T_x$  на выходе из калорифера, если ее прокачивать через него с объемным расходом  $Q = 0,02 \text{ л/с}$ ? Температура воды на входе  $T_0$ . Считайте, что мощность калорифера постоянна и расходуется только на нагрев воды. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

9 класс

1. Папа, мама и их ребенок бегут в эстафете по одному кругу стадиона каждый, по

очереди передавая друг другу эстафетную палочку. Мама пробежала в  $N$  раз быстрее ребенка, а папа – еще в  $N$  раз быстрее мамы. Найдите  $N$ , если известно, что средняя скорость эстафетной палочки на протяжении всей дистанции оказалась в  $12/7$  раз быстрее скорости ребенка.

2. Мальчик стоит на некотором расстоянии от плоскости, наклоненной под углом  $45^\circ$  к горизонту (рис.1). Он кидает мячик со скоростью  $u$  под углом  $\alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ) к горизонту, тот упруго ударяется о плоскость, после чего возвращается в исходную точку. Найдите расстояние  $L$  между мальчиком и плоскостью. Ускорение свободного падения  $g$ , размерами мальчика и мяча, а также влиянием воздуха пренебречь.

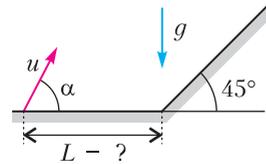


Рис. 1

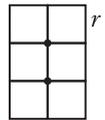


Рис. 2

3. Сетка  $2$  на  $3$  квадрата сделана из однородной проволоки. Сопротивление отрезка проволоки длиной в одну сторону квадрата равно  $r$ . Чему равно сопротивление, измеренное между центральными точками сетки (рис.2)?

4. Платформа массой  $M$  подпирается снизу пружиной жесткостью  $k$  (рис.3). С высоты  $H$  на нее падает маленький пластилиновый шарик массой  $m$ . На платформе лежал легкий лист бумаги, в результате шарик не прилип к платформе: вниз он двигался вместе с платформой, а затем, при движении вверх, оторвался от нее в тот момент, когда действующая на него сила реакции опоры обратилась в

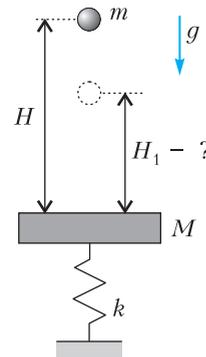


Рис. 3

ноль. На какую высоту  $H_1$  относительно исходного положения платформы взлетит шарик после отрыва от нее? Ускорение свободного падения  $g$ , влиянием воздуха пренебречь.

10 класс

1. Парашютист, опускающийся с постоянной скоростью  $v$ , бросает камень так, что его начальная скорость горизонтальна и равна  $u$  относительно земли. Какое расстояние будет между парашютистом и камнем через время  $t$  после броска, если к этому времени они еще будут находиться в воздухе? Влиянием воздуха на камень пренебречь, ускорение свободного падения  $g$ .

2. В герметичном цилиндрическом сосуде под подвижным поршнем находится газ, над поршнем – вакуум (рис. 4).

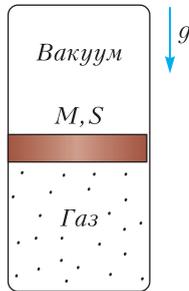


Рис. 4

Вначале поршень находился точно посередине сосуда. Затем газ начинает просачиваться в верхнюю часть сосуда через малое отверстие в поршне. При этом поршень очень медленно опускается. Найдите давление в нижней части сосуда непосредственно перед тем, как поршень достигнет дна. Ускорение свободного падения  $g$ , масса поршня  $M$ , площадь сечения сосуда  $S$ . Температура цилиндра, поршня и газа одинакова и поддерживается постоянной. Трения нет.

3. На горизонтальной плоскости покоится тело. На него с горизонтальной скоростью  $u$  налетает кусок пластилина и прилипает. Тело смещается на расстояние  $l_1$  и останавливается. После этого на него налетает с той же скоростью точно такой же кусок пластилина. Тело смещается на расстояние  $l_2$  и останавливается. Найдите коэффициент трения скольжения между телом и плоскостью. Ускорение свободного падения  $g$ .

4. См. задачу 2 для 9 класса (только теперь угол  $\beta$  задан в общем виде).

11 класс

1. Два сосуда с идеальным газом соединены тонкой трубкой с вентилем. В первом сосуде объемом  $V_1$  давление равно  $p_1$ , а во втором объемом  $V_2$  давление равно  $p_2$ . Вен-

тиль открывают на очень короткое время и сразу же закрывают. После установления равновесия в каждом из сосудов давление в первом равно  $p'_1$ . Чему равно давление  $p'_2$  во втором сосуде? Температура поддерживается постоянной.

2. На закрепленное кольцо, плоскость которого вертикальна, надета и закреплена в точке  $B$  легкая пружина (рис. 5). В недефор-

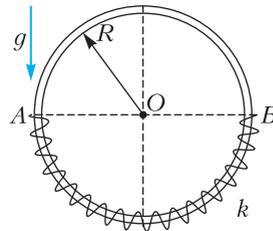


Рис. 5

мированном состоянии свободный конец пружины находится в точке  $A$  на одинаковой высоте с точкой  $B$  и центром кольца  $O$ . На кольцо также надели массивную шайбу, прикрепив ее к свободному концу пружины (в точке  $A$ ). Найдите массу шайбы  $m$ , если известно, что ее положение равновесия оказалось по высоте на  $R/2$  ниже прямой  $AB$ . Ускорение свободного падения  $g$ , радиус кольца  $R$ , жесткость пружины  $k$ . Трением между кольцом и шайбой, кольцом и пружиной пренебречь.

3. На горизонтальной плоскости расположены массивное тело и два закрепленных детских пулемета – слева и справа от тела (рис. 6). Стволы пулеметов ориентированы горизонтально и нацелены перпендикулярно поверхности тела. Прямая, проходящая через центры пулеметов, также перпендикулярна поверхности тела. Из пулеметов одновременно начали стрелять. Известно, что временные интервалы между вылетом пуль у каждого пулемета малы и фиксированы. Также известно, что у левого пулемета скорость вылета пуль в 2 раза выше, чем у правого, но масса пуль в 1,5 раза меньше, а временной интервал между пульками на 30% больше, чем у правого. В какую сторону

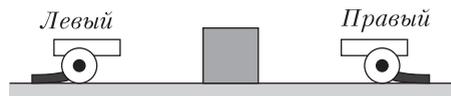


Рис. 6

начнет двигаться тело? Трением между телом и плоскостью пренебречь, удары пулек о поверхность тела считать абсолютно упругими. Столкновениями пулек между собой и сопротивлением воздуха пренебречь.

4. На гладкую горизонтальную спицу надеты три бусинки (рис.7). Масса второй

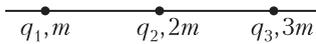


Рис. 7

бусинки в 2 раза больше первой, а масса третьей бусинки в 3 раза больше первой. Бусинки находятся на одинаковых расстояниях друг от друга и могут свободно без трения перемещаться вдоль спицы. На бусинках имеются одноименные заряды  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  соответственно. Бусинки отпускают, и они начинают разлетаться так, что вторая бусинка все время остается строго посередине между первой и третьей. Найдите заряд  $q_1$ , если заряды  $q_2$  и  $q_3$  известны.

### Второй тур

8 класс

1. Ведро до краев наполнено водой. В ведро медленно опускают сплошной деревянный кубик с ребром  $a$ . При этом из ведра выливается вода объемом  $V_0$ . Затем кубик убирают и вместо него, не доливая воды в ведро, медленно опускают другой кубик из того же материала, но с ребром  $2a$ . Определите, какой объем воды  $V$  при этом выльется из ведра. Эффектами поверхностного натяжения пренебречь.

2. Кубик плавает в жидкости плотностью  $\rho$ . Когда к нему присоединили грузик, кубик стал плавать, погруженный на 60% своего объема. Когда к нему присоединили второй такой же грузик, кубик полностью погрузился в жидкость и стал плавать в безразличном положении равновесия. Найдите плотность материала, из которого сделан кубик.

3. Цирковая трапеция представляет собой длинную палку, подвешенную на двух упругих вертикальных тросах (рис.8). Когда на трапеции повисла обезьянка, ухватившись за середину палки, то палка опустилась вниз на  $d = 1,5$  см. Затем обезьянка переместилась в точку  $A$ , которая в два раза ближе к левому концу палки  $P$ , чем к правому концу

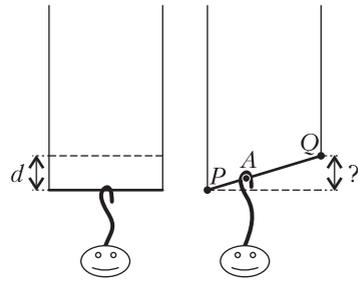


Рис. 8

$Q$ . На сколько после этого левый конец оказался ниже правого?

4. В нулевой момент времени в ванну с водой начинают наливать горячую воду из крана. Воду непрерывно помешивают и измеряют температуру. График зависимости температуры от времени показан на рисунке 9. Определите температуру наливаемой

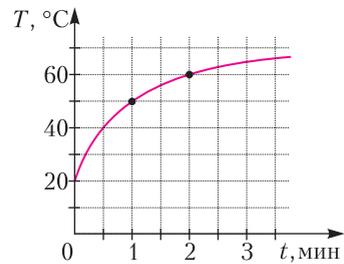


Рис. 9

воды, если расход воды из крана постоянный. Теплоемкостью ванны и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

9 класс

1. Два пешехода движутся по часовой стрелке с постоянными по абсолютной величине скоростями  $v_1 = 1,2$  м/с,  $v_2 = 1$  м/с, первый – по окружности радиусом  $r_1 = 8$  м, второй – по окружности радиусом  $r_2 = 10$  м. Центры окружностей совпадают. За какое время расстояние между пешеходами изменится от минимально возможного при таком движении до максимально возможного?

2. Мальчик, стоя на горизонтальной плоскости, кидает камень так, чтобы тот улетел на максимальное расстояние. Второй камень он бросает с той же по абсолютной величине скоростью вертикально вверх. Его ловит другой мальчик в верхней точке траектории и затем бросает из этой точки под тем же углом и с той же скоростью, что и первый

камень. Во сколько раз расстояние по горизонтали, которое преодолел второй камень, больше по сравнению с первым? Влиянием воздуха пренебречь.

**3.** Новогодняя гирлянда представляет собой прямоугольную проволочную сетку, в горизонтальные переемы которой вставлены одинаковые лампочки, как показано на рисунке 10. Сопротивление гирлянды, из-

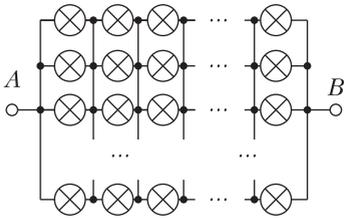


Рис. 10

меренное между клеммами  $A$  и  $B$ , равно  $R_0 = 1919$  Ом. После того как в гирлянде перегорела одна лампочка, сопротивление стало равным  $R = 1920$  Ом. Определите общее количество лампочек в гирлянде, если известно, что их число заведомо больше 1938 и меньше 3838. Сопротивления лампочек одинаковы, сопротивлением проводов пренебречь.

**4.** По лестнице с одинаковыми ступенями прыгает вниз маленькая лягушка (рис.11).

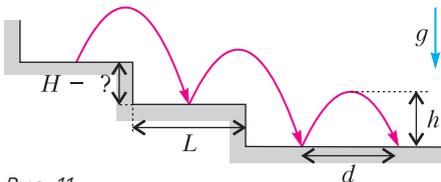


Рис. 11

Каждый раз она отталкивается одинаковым образом и попадает с середины ступени на середину следующей ступени. Последний прыжок она совершила по ровной поверхности, длина этого прыжка  $d$ , а высота  $h$ . Найдите высоту ступеней  $H$ , если длина ступеней равна  $L$ . Влиянием воздуха пренебречь.

10 класс

**1.** На острове Манхэттен г.Нью-Йорка много улиц, которые расположены взаимно перпендикулярно на небольших расстояниях друг от друга. Алексей и Василий, прогуливаясь по острову, в некий момент с

помощью навигатора определили, что расстояние между ними равно 3,4 км. Василий остался на месте, а Алексей начал двигаться к нему пешком по улицам по оптимальному пути. В отличие от Алексея, мы не знаем, где точно находятся приятели. Постарайтесь, с помощью имеющейся информации, определить минимальное и максимальное возможное значение длины этого оптимального пути. Ответ округлите до сотен метров.

**2.** Три одинаковых сосуда с идеальным газом соединены тонкими трубками, снабженными вентилями (рис.12). Давления в

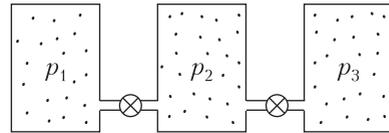


Рис. 12

1-м, 2-м и 3-м сосудах равны  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  соответственно. Вентиль между сосудами 1 и 2 открывают и после наступления равновесия закрывают. Затем открывают вентиль между сосудами 2 и 3. Найдите давление  $p'_3$  в 3-м сосуде после наступления равновесия. Температура поддерживается постоянной.

**3.** На горизонтальной поверхности стоят три одинаковых кубика (рис.13). Кубики

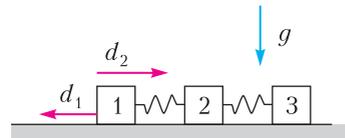


Рис. 13

соединены одинаковыми пружинами, натяжение которых одинаково. Если 1-й кубик медленно тянуть влево, то, когда он пройдет расстояние  $d_1$ , 3-й кубик начнет двигаться. Если из того же исходного положения 1-й кубик медленно толкать вправо, то, когда он пройдет расстояние  $d_2$ , 3-й кубик начнет двигаться. На какое расстояние  $d_x$  нужно одновременно переместить вправо 1-й и 3-й кубики из того же исходного положения, чтобы средний кубик пришел в движение? Коэффициенты трения покоя и скольжения считать одинаковыми.

**4.** Значок в виде равностороннего треугольника, его высоты и вписанной в него

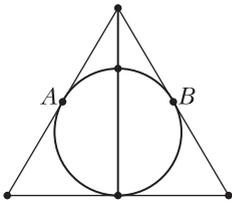


Рис. 14

окружности радиусом  $r$  (рис.14) выполнен из однородной проволоки с сопротивлением  $\rho$  на единицу длины. Найдите сопротивление между точками  $A$  и  $B$ .

## 11 класс

1. Четыре пешехода движутся с постоянными положительными скоростями  $v_1 = 1,8$  м/с,  $v_2 = 1,4$  м/с,  $v_3 = 1,2$  м/с,  $v_4 = 1$  м/с вдоль оси  $x$ . В начальный момент времени их координаты равны:  $x_1 = 0$  м,  $x_2 = 30$  м,  $x_3 = 65$  м,  $x_4 = 80$  м. После того как один догоняет другого, далее они движутся вместе со скоростью пешехода, которого догнали. Какой путь пройдет первый пешеход к моменту, когда все они встретятся?

2. В вершинах равностороннего треугольника расположены точечные заряды различной величины. Чему равен потенциал электрического поля в центре треугольника, если потенциалы в серединах сторон равны  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  и  $\phi_3$ ?

3. В цилиндрическом сосуде под поршнем массой  $m$  находится несжимаемая жидкость массой  $M$ . Сосуд поместили под герметичный колпак и откачали воздух. На дне сосуда находился маленький пузырек воздуха. Во сколько раз увеличится объем пузырька, когда он всплывет под поршень? Капиллярными эффектами и давлением насыщенных паров жидкости в пузырьке пренебречь.

4. На наклонной шероховатой плоскости с углом наклона  $\alpha$  лежит шайба, привязанная к горизонтально расположенной нити длиной  $L$ , которая другим концом прикреплена к плоскости

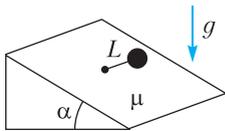


Рис. 15

расположенной нити длиной  $L$ , которая другим концом прикреплена к плоскости (рис.15). Шайбу отпускают, и она начинает скользить по плоскости. Найдите угол поворота нити, при котором скорость шайбы достигает максимального значения, а также величину этой максимальной скорости. Ускорение свободного падения  $g$ , коэффициент трения шайбы о плоскость  $\mu$ .

Шайбу отпускают, и она начинает скользить по плоскости. Найдите угол поворота нити, при котором скорость шайбы достигает максимального значения, а также величину этой максимальной скорости. Ускорение свободного падения  $g$ , коэффициент трения шайбы о плоскость  $\mu$ .

## II (заключительный) этап

## 8 класс

1. Толя и Поля находятся на одной прямой на расстоянии 3900 м друг от друга. Они одновременно начинают бежать навстречу друг другу: Толя со скоростью 5 м/с, а Поля со скоростью 3 м/с. Толя останавливается на десятисекундный отдых каждые 200 м, а Поля – на двадцатисекундный отдых каждые 300 м. Через какое время после начала движения они встретятся?

2. В теплоизолированном сосуде находятся в тепловом равновесии вода и кусок льда. Внутрь сосуда помещают пористый (проницаемый для воды) невесомый поршень и удерживают его на одном уровне так, что в начальный момент времени плоскость поршня совпадала с поверхностью воды, а весь лед был под водой (рис.16). Сначала для удержания поршня было достаточно приложить силу  $F$ . Затем к сосуду подвели некоторое количество теплоты  $Q$ . После установления нового теплового равновесия прикладываемая сила стала равной  $F'$ . Найдите  $Q$ , если известно, что лед растаял не полностью. Плотность воды  $\rho_0$ , плотность льда  $\rho$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda$ , ускорение свободного падения  $g$ . Считайте, что лед не касается дна сосуда.

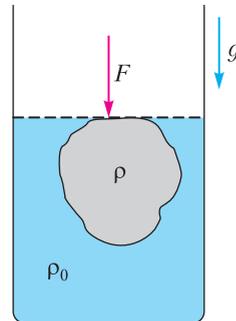


Рис. 16

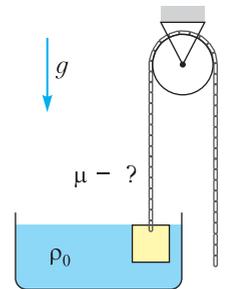


Рис. 17

3. Сплошной кубик со стороной  $a$  прикреплен к массивной цепочке, перекинутой через неподвижный блок, как показано на рисунке 17, и погружен в жидкость плотностью  $\rho_0$ . В исходной ситуации верхняя грань кубика и поверхность жидкости находятся на одном уровне. Точку подвеса начали поднимать вверх. Когда ее подняли на  $\Delta h$ , кубик снова оказался в равновесии, но теперь его нижняя грань касалась воды. Найдите

те массу единицы длины цепочки  $\mu$ . Трением пренебречь.

4. В стакан сечением  $S$  налиты две несмешивающиеся жидкости плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ). На границе раздела этих жидкостей плавает тело объемом  $V$ , причем доля  $\alpha$  его объема находится выше границы раздела (рис. 18). Легкую жидкость сливают. На сколько изменится уровень тяжелой жидкости в стакане? Тело дна стакана не касается.

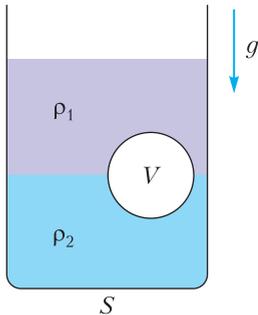


Рис. 18

9 класс

1. Камень, брошенный вверх, пересекает уровень второго этажа дважды (при подъеме и спуске) с интервалом времени  $\tau$ . Аналогичный интервал для более высокого этажа составляет  $T$ . Определите разницу высот между вторым и более высоким этажом. Ускорение свободного падения  $g$ . Влиянием воздуха пренебречь.

2. Закрепленная спица изогнута в виде двух полуокружностей  $AB$  и  $BC$ , лежащих в вертикальной плоскости, с радиусами, соответственно,  $a$  и  $b$  (рис. 19). Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  (концы полуокружностей) находятся на одной вертикальной прямой. Два одинаковых шарика покоятся в точках  $A$  и  $B$ . Шарик в точке  $A$  начинает скользить вдоль спицы. В точке  $B$  шарики слипаются. С какой скоростью они вылетят со спицы в точке  $C$ ? Ускорение свободного падения  $g$ . Трением и влиянием воздуха пренебречь.

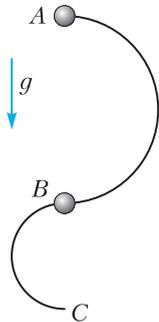


Рис. 19

3. Доска длиной  $L$  движется по гладкой горизонтальной плоскости вдоль своей длины и наезжает на шероховатую полосу длиной  $L$  с коэффициентом трения  $\mu$  и, когда полностью съезжает, сразу останавливается. Найдите начальную скорость доски. Ускорение свободного падения  $g$ .

4. Центр колеса радиусом  $R$  поднят над полом на некоторую высоту  $H$  (рис. 20). Колесо вращается с угловой скоростью  $\omega$  в вертикальной плоскости. В какой-то момент от обода отрывается кусочек грязи (угол между радиусом вектором, проведенным к этому кусочку из центра колеса, и вертикалью  $\alpha$ ) и падает на пол точно под центром колеса. Найдите  $H$ . Ускорение свободного падения  $g$ .

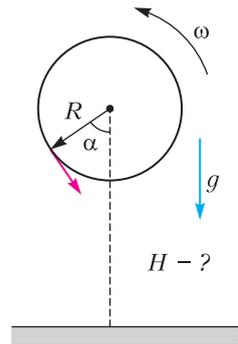


Рис. 20

5. На горизонтальной плоскости расположены массивное тело и два закрепленных детских пулемета – 1 и 2 (рис. 21). Стволы

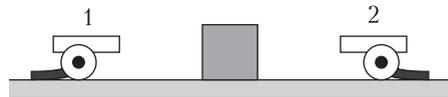


Рис. 21

пулеметов ориентированы горизонтально и нацелены перпендикулярно поверхности тела. Прямая, проходящая через центры пулеметов, также перпендикулярна поверхности тела. Из пулеметов одновременно начали стрелять. Известно, что временные интервалы между вылетом пуль из пулеметов малы и равны  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , соответственно. Скорость вылета пуль из пулеметов равна  $v$ . С какой установившейся скоростью  $u$  будет двигаться тело? Трением между телом и плоскостью, столкновениями пуль между собой и сопротивлением воздуха пренебречь. Удары пуль о поверхность тела абсолютно упругие. Считать, что к моменту достижения установившейся скорости тело не столкнется ни с одним из пулеметов.

10 класс

1. Две пружинки одинаковой длины подвешены к потолку. Снизу к ним крепится однородный стержень длиной  $L$ : один конец крепится к пружинке жесткостью  $k_2$ , а другой конец располагается на расстоянии  $a$  от места крепления к пружинке жесткостью  $k_1$  (рис. 22). Найдите отношение  $k_2/k_1$ , если

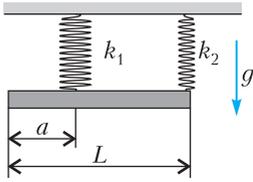


Рис. 22

известно, что после растяжения пружинок стержень висит горизонтально.

2. На сосуд сечением  $S$  плотно поставлена кастрюля того же сечения, так что воздух между сосудом и кастрюлей не проникает (рис.23). Кастрюля закреплена. В дно кастрюли вставлена тонкая трубка, которая спускается в сосуд почти до дна. В сосуд и в кастрюлю налита жидкость плотностью  $\rho$ . Начальная разность уровней жидкостей в них равна  $H$ . Между дном кастрюли и поверхностью жидкости в сосуде имеется воздушная прослойка толщиной  $h$ . Вся система находится в равновесии. Сбоку сосуда открывают небольшое отверстие, через которое начинает вытекать жидкость. Какой объем  $V$  жидкости вытечет из сосуда, когда ее уровень в сосуде понизится на  $h$ ? Атмосферное давление  $p_0$ , температура не меняется, в кастрюле всегда есть жидкость, ускорение свободного падения  $g$ .

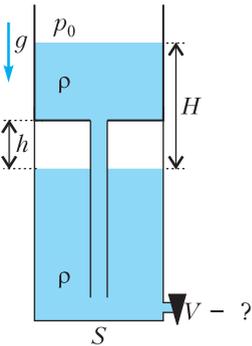


Рис. 23

воздушная прослойка толщиной  $h$ . Вся система находится в равновесии. Сбоку сосуда открывают небольшое отверстие, через которое начинает вытекать жидкость. Какой объем  $V$  жидкости вытечет из сосуда, когда ее уровень в сосуде понизится на  $h$ ? Атмосферное давление  $p_0$ , температура не меняется, в кастрюле всегда есть жидкость, ускорение свободного падения  $g$ .

3. Сосуд разделен на три равные части полупрозрачными перегородками: левая перегородка медленно пропускает газы  $A$  и  $B$ , но не пропускает газ  $C$ , правая перегородка пропускает только газ  $A$  (рис.24). В начальный момент времени все газы находились в левой трети сосуда, где давление равнялось  $p_0$ . В остальной части сосуда был вакуум.

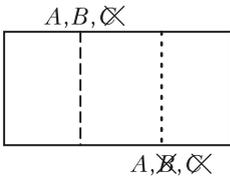


Рис. 24

Числа молей газов  $A$ ,  $B$ , и  $C$  равны, соответственно,  $\nu_A$ ,  $\nu_B$  и  $\nu_C$ . Найдите установившееся давление в левой трети сосуда. Температура поддерживается постоянной, газы считайте идеальными.

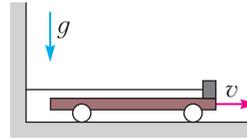


Рис. 25

Длинная платформа стоит на гладком полу. На правом конце платформы лежит груз, привязанный невесомой нерастяжимой горизонтальной нитью к стене слева (рис.25). Платформе ударом придают некоторую скорость. Платформа выезжает из-под груза, потеряв 40% своей первоначальной скорости. Во сколько раз нужно увеличить массу груза, чтобы при повторении эксперимента платформа не смогла выехать из-под груза?

4. Четыре одинаковые металлические пластины площадью  $S$  каждая расположены на близком одинаковом расстоянии  $d$  друг от друга ( $d \ll \sqrt{S}$ ) и несут заряды  $Q, -Q, Q, -Q$  (рис.26). Первую и четвертую пластины соединяют проводником. Найдите напряжение между второй и третьей пластинами. Электрическая постоянная  $\epsilon_0$ .

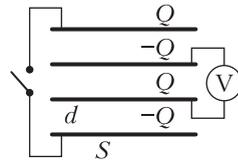


Рис. 26

Четыре одинаковые металлические пластины площадью  $S$  каждая расположены на близком одинаковом расстоянии  $d$  друг от друга ( $d \ll \sqrt{S}$ ) и несут заряды  $Q, -Q, Q, -Q$  (рис.26). Первую и четвертую пластины соединяют проводником. Найдите напряжение между второй и третьей пластинами. Электрическая постоянная  $\epsilon_0$ .

11 класс

1. Тая и Петя находятся на одной прямой на расстоянии 3980 м друг от друга. Они одновременно начинают бежать навстречу друг другу: Тая со скоростью 3 м/с, а Петя со скоростью 5 м/с. Тая останавливается на двадцатисекундный отдых каждые 300 м, а Петя – на десятисекундный отдых каждые 200 м. Через какое время после начала движения они встретятся?

2. К потолку подвешены две легкие недеформированные пружины жесткостями  $k_1 = 100$  Н/м и  $k_2 = 60$  Н/м соответственно и длиной  $L_1 = 0,2$  м и  $L_2 = 0,15$  м соответственно (рис.27). К концам пружин прикрепили однородный стержень длиной, равной рас-

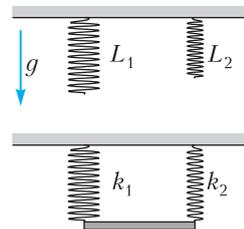


Рис. 27

стоянию между точками подвеса пружин, и отпустили. Оказалось, что стержень в равновесии строго параллелен горизонту. Найдите вес стержня.

**3.** На тонкое полукольцо, сделанное из непроводящего материала, нанесли маленькую бусинку, имеющую положительный заряд (рис.28). На концах полукольца закрепили положительные точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$  ( $q_1 < q_2$ ) в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Полукольцо также закрепили. Через длительное время бусинка остановилась в точке  $C$ . Найдите угол  $\alpha$ . Силы тяжести нет.

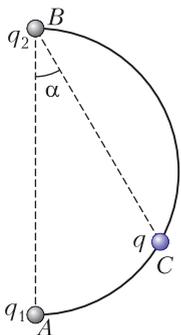


Рис. 28

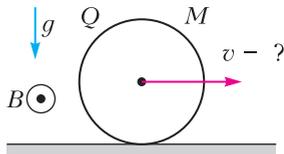


Рис. 29

**4.** Кольцо массой  $M$ , равномерно заряженное по периметру зарядом  $Q$ , катится по горизонтальной плоскости (рис.29). В какой-то момент времени включается магнитное поле с индукцией  $B$  перпендикулярно плоскости кольца. Сила давления кольца на плоскость возрастает в 3 раза. Найдите скорость кольца. Ускорение свободного падения  $g$ .

**5.** Оцените период остаточных колебаний бензина в наполовину заполненной железнодорожной цистерне, возникших в результате ее торможения. Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать недостающие в условии задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.

**6. Задача-демонстрация** (демонстрируется видеоролик). Внутри обычной консервной банки находится небольшое устройство, прикрепленное к центру крышки и состоящее из моторчика и питающего его отсека с батарейками (рис.30). При включении моторчик вращает по кругу отсек с батарейками. Банку плотно закрывают крышкой с

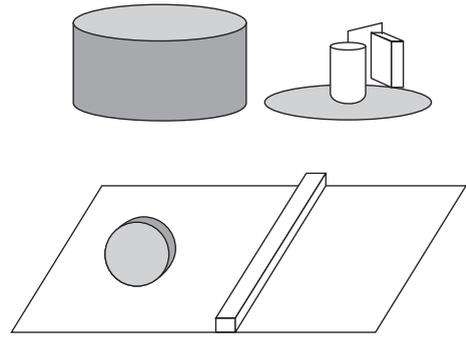


Рис. 30

включенным моторчиком и кладут на бок. Она приходит в движение и перемещается по горизонтальному столу. Если на ее пути установить небольшое препятствие, то она преодолевает его, причем иногда с первой попытки, а иногда, ударившись о препятствие, откатывается назад и преодолевает препятствие после нескольких попыток. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили В.Боровков, Е.Жданов, А.Киприянов, С.Лежнин, М.Махмудиан, А.Ненашев, Е.Пальчиков, А.Погосов, Д.Похабов, Г.Федотович

**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНИК

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

|  |  |
|--|--|
| <p><b>УСЛУГИ</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Интернет-магазин <a href="http://www.bgshop.ru">www.bgshop.ru</a></li> <li>■ Кафе</li> <li>■ Клубные (дисконтные) карты и акции</li> <li>■ Подарочные карты</li> <li>■ Предварительные заказы на книги</li> <li>■ Встречи с авторами</li> <li>■ Читательские клубы по интересам</li> <li>■ Индивидуальное обслуживание</li> <li>■ Подарочная упаковка</li> <li>■ Доставка книг из-за рубежа</li> <li>■ Выставки-продажи</li> </ul> | <p><b>АССОРТИМЕНТ</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Книги</li> <li>■ Аудиокниги</li> <li>■ Антиквариат и предметы коллекционирования</li> <li>■ Фильмы, музыка, игры, софт</li> <li>■ Канцелярские и офисные товары</li> <li>■ Цветы</li> <li>■ Сувениры</li> </ul> |
|--|--|

г. Москва, м. Лубянка, м. Китай-город  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1  
8 (495) 781-19-00  
[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)  
пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №9)

1. Например, пусть неизвестные равняются соответствующим коэффициентам из другой половины уравнения:  $11 \cdot 14 + 12 \cdot 15 + 13 \cdot 16 = 14 \cdot 11 + 15 \cdot 12 + 16 \cdot 13$ .

2. Если фамилия сестры, например, Смородина, то брат может иметь фамилию Смородина или Смородин – однозначно сказать нельзя.

3. Площади синих фигур равны. Отношение площади вписанного в круг квадрата к площади круга, в который он вписан, не зависит от размера этих фигур. Пусть это отношение равно  $a$ . Точно так же отношение площади вписанного в квадрат круга к площади квадрата, в который он вписан, не зависит от размера этих фигур; пусть оно равно  $b$  (на самом деле,  $a = \frac{2}{\pi}$ ,  $b = \frac{\pi}{4}$ , но нам для решения эти значения не понадобятся).

Площадь синего круга:  $a \cdot b \cdot 1$ , площадь синего квадрата:  $b \cdot a \cdot 1$ , т.е. эти площади равны.

4. Обозначим массы скульптур через  $M_1, M_2, \dots, M_{10}$ . Массы шаров равны  $|M_1 - M_2|, |M_2 - M_3|, \dots, |M_{10} - M_1|$ .

Рассмотрим тождество

$$(M_1 - M_2) + (M_2 - M_3) + \dots + (M_{10} - M_1) = 0.$$

Из десяти чисел, заключенных в скобки, некоторые положительные, остальные отрицательны. Осталось заметить, что сумма модулей положительных скобок равняется сумме модулей отрицательных скобок. Поэтому если те шары, для которых соответствующая скобка положительна, положить на одну чашку весов, а остальные – на другую, то весы окажутся в равновесии.

## LXI Международная математическая олимпиада

1. Положим  $\varphi = \angle PAD$  и  $\psi = \angle CBP$ ; тогда  $\angle PBA = 2\varphi$ ,  $\angle DPA = 3\varphi$ ,  $\angle BAP = 2\psi$  и  $\angle BPC = 3\psi$  (рис.1). Пусть  $X$  – точка на отрезке  $AD$  такая, что  $\angle XPA = \varphi$ . Имеем

$$\begin{aligned} \angle PXD &= \angle PAX + \angle XPA = 2\varphi = \\ &= \angle DPA - \angle XPA = \angle DPX. \end{aligned}$$

Получаем, что треугольник  $DPX$  – равнобедренный с боковыми сторонами  $DX = DP$ , поэтому биссектриса угла  $ADP$  является серединным перпендикуляром к  $XP$ . Аналогично, если  $Y$  – точка на отрезке  $BC$  такая, что  $\angle BPY = \psi$ , то биссектриса угла  $PCB$  является серединным перпендикуляром к  $PY$ . Итак, нам требуется доказать, что серединные перпендикуляры к отрезкам  $XP$ ,  $PY$  и  $AB$  пересекаются в одной точке.

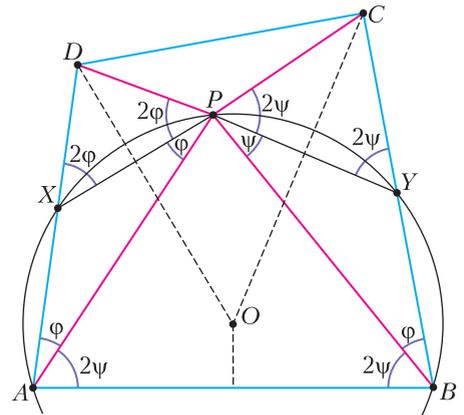


Рис. 1

Заметим, что

$$\angle AXP = 180^\circ - \angle PXD = 180^\circ - 2\varphi = 180^\circ - \angle PBA.$$

Значит, четырехугольник  $AXPB$  вписанный, поэтому  $X$  лежит на описанной окружности треугольника  $APB$ . Аналогично,  $Y$  лежит на описанной окружности треугольника  $APB$ . Следовательно, серединные перпендикуляры к отрезкам  $XP$ ,  $PY$  и  $AB$  проходят через центр окружности  $(ABYPX)$ . Этим завершается доказательство.

2. Применим обобщенное (весовое) неравенство о средних для положительных  $x_1, \dots, x_n$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  таких, что  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ :

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Имеем

$$a^a b^b c^c d^d \leq a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

значит, достаточно доказать, что

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1 = (a + b + c + d)^3.$$

Неравенство

$$(a + b + c + d)^3 \geq (a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

можно доказать, например, следующим образом. Имеем

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^3 &> a^2(a + 3b + 3c + 3d) + \\ &+ b^2(3a + b + 3c + 3d) + c^2(3a + 3b + c + 3d) + \\ &+ d^2(3a + 3b + 3c + d), \quad (*) \end{aligned}$$

так как все слагаемые в правой части присутствуют явно после раскрытия скобок в левой части. Поскольку каждое из выражений  $a + 3b + 3c + 3d$ ,  $3a + b + 3c + 3d$ ,  $3a + 3b + c + 3d$ ,  $3a + 3b + 3c + d$

не меньше чем  $a + 2b + 3c + 4d$ , правая часть в (\*) не меньше чем  $(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ .

**3.** Объединим в пары камушки с суммой масс  $4n + 1$ , так что получается множество  $S$ , состоящее из  $2n$  пар:  $\{1, 4n\}$ ,  $\{2, 4n - 1\}$ ,  $\{1, 4n\}$ , ...,  $\{2n, 2n + 1\}$ . Достаточно разбить  $S$  на два подмножества по  $n$  пар так, чтобы каждое подмножество содержало по два камушка каждого цвета. Введем мультиграф  $G$  (т.е. граф, в котором допускаются петли и кратные ребра) на  $n$  вершинах так, что каждая вершина соответствует определенному цвету. Для каждой пары камушков из множества  $S$  проведем ребро между вершинами, соответствующими цветам этих камушков. При этом степень каждой вершины будет равна 4. Также заметим, что требуемое разбиение камушков соответствует раскраске ребер графа в два цвета, скажем в синий и красный, такой, что из каждой вершины выходит ровно по 2 красных и 2 синих ребра.

Для завершения решения достаточно сделать соответствующую раскраску для каждой компоненты связности  $G'$  графа  $G$ . Поскольку степени всех вершин четны, в  $G'$  существует Эйлеров обход  $C$  (т.е. цикл, проходящий по каждому ребру  $G'$  ровно один раз). Заметим, что количество ребер в  $C$  четно (оно равно удвоенному количеству вершин в  $G'$ ). Таким образом, все ребра можно покрасить в красный и синий цвета так, что любые два соседних ребра из  $C$  имеют различные цвета (можно сделать обход вдоль  $C$  и красить ребра, чередуя красный и синий цвета). Таким образом, в  $G'$  из каждой вершины выходит поровну красных и синих ребер, как и требовалось.

**4.**  $k = n^2 - n + 1$ .

Сначала покажем, что для любого  $k \leq n^2 - n$  может не быть пары станций, связанных каждой из двух компаний. Достаточно привести пример для  $k = n^2 - n$ .

Пусть компания  $A$  владеет трансферами  $(i, i + 1)$ , где  $i$  не делится на  $n$ , а компания  $B$  владеет трансферами вида  $(i, i + n)$ , где  $1 \leq i \leq n^2 - n$ . Тогда номера  $i, j$  станций, связанных компанией  $A$ , таковы, что  $|i - j| \leq n - 1$ . Ясно, что такая пара не связана компанией  $B$ .

Заметим, что все конечные станции  $A$ -трансферов различны, поэтому имеется  $n^2 - k = n - 1$  станций  $a_1, \dots, a_{n-1}$ , которые не являются конечными для  $A$ -трансферов. Со станции  $a_1$  поднимемся  $A$ -трансферами максимально высоко. Этот маршрут дает максимальную  $A$ -цепь из станций. Аналогично, каждая из станций  $a_2, \dots, a_{n-1}$  определяет максимальную  $A$ -цепь (возможно, состоящую лишь из

одной станции). Ясно, что каждая из  $n^2$  станций входит в одну из максимальных  $A$ -цепей (так как для каждой станции однозначно определен путь вниз  $A$ -трансферами до одной из станций  $a_1, \dots, a_{n-1}$ ). Аналогично показываем, что каждая станция принадлежит одной из  $n - 1$  максимальных  $B$ -цепей. Заметим, что одна из максимальных  $A$ -цепей содержит не менее  $n^2 / (n - 1) > n$  станций и хотя бы две из этих станций принадлежат одной и той же максимальной  $B$ -цепи. Найденные две станции – искомые.

**5.** При всех  $n$ .

Предположим, что не все числа равны, и  $b_1 > b_2 > \dots > b_k$  – все различные числа среди чисел на карточках,  $k \geq 2$  (так что набор чисел на карточках состоит из нескольких копий чисел  $b_1$ , нескольких копий чисел  $b_2$  и т.д.). Если  $d = \text{НОД}(b_1, \dots, b_k) > 1$ , то, разделив все числа на карточках на  $d$ , приходим к примеру, который удовлетворяет условию и в котором уже НОД всех чисел на карточках равен 1. Итак, далее будем считать, что  $\text{НОД}(b_1, \dots, b_k) = 1$ . Пусть  $p$  – простой делитель числа  $b_1$  (он есть, так как  $b_1 > 1$ ). Так как  $\text{НОД}(b_1, \dots, b_k) = 1$ , найдется минимальное  $m \geq 2$  такое, что  $b_m$  не делится на  $p$ .

Число  $q = \frac{b_{m-1} + b_m}{2}$  должно быть средним геометрическим нескольких  $b_i$ , т.е.  $q^t = c_1 c_2 \dots c_t$  для некоторых  $t \in \mathbb{N}$  и  $c_i \in \{b_1, \dots, b_k\}$ . Заметим, что некоторое  $c_i$  совпадает с одним из чисел  $b_1, \dots, b_{m-1}$ , поскольку иначе  $c_1 c_2 \dots c_t \leq b_m^t < q^t$ . Значит,  $p$  является делителем некоторого  $c_i$ , следовательно,  $c_1 c_2 \dots c_t$  делится на  $p$ .

Равенство  $q^t = c_1 c_2 \dots c_t$  сводится к следующему равенству в целых числах:

$$(b_{m-1} + b_m)^t = 2^t \cdot c_1 c_2 \dots c_t.$$

Поскольку правая часть делится на  $p$ , то и  $b_{m-1} + b_m$  делится на  $p$ . Но с другой стороны, согласно определению  $m$ ,  $b_{m-1}$  делится на  $p$ , а  $b_m$  – нет. Мы получаем противоречие, завершающее решение.

**6.** Докажем требуемое утверждение для  $c = \frac{1}{8}$ .

Положим  $\delta = \frac{1}{8} n^{-1/3}$ . Для любой прямой  $l$  и любой точки  $X$  через  $X_l$  обозначаем проекцию  $X$  на  $l$ ; аналогичное обозначение применяем и для множеств точек.

Предположим, что для некоторой прямой  $l$  множество  $S_l$  содержит две соседние точки  $X$  и  $Y$  на расстоянии  $XY = 2d$ . Тогда серединный перпендикуляр отрезка  $XY$  разделяет  $S$ , при этом все точки множества  $S$  будут находиться на расстоянии не менее  $d$  от прямой  $l$ . Таким образом, если

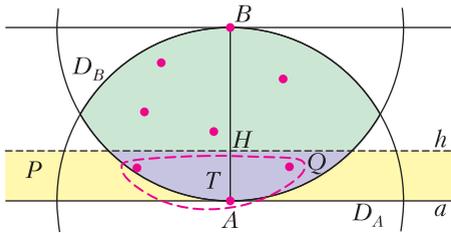


Рис. 2

$d \geq \delta$ , то требуемая прямая найдена. Предположим, что, напротив, для всякой прямой  $l$  в множестве  $S_l$  расстояние между соседними точками меньше  $2\delta$ .

Выберем точки  $A, B \in S$  на максимальном расстоянии  $M = AB$  друг от друга, так что  $AB$  – диаметр множества  $S$  (рис.2); очевидно,  $M \geq 1$ . Пусть  $l$  – это прямая  $AB$ . Множество  $S$  находится в пересечении двух кругов  $D_A$  и  $D_B$  радиуса  $M$  с центром в точках  $A$  и  $B$ . Значит, проекция  $S_l$  лежит на отрезке  $AB$ . Более того, точки множества  $S_l$  делят отрезок  $AB$  на не более чем  $n-1$  частей, длина каждой из которых меньше  $2\delta$ . Поэтому

$$M < n \cdot 2\delta. \quad (1)$$

На отрезке  $AB$  выберем точку  $H$  такую, что  $AH = \frac{1}{2}$ . Пусть  $P$  – полоса между прямыми  $a$  и  $h$ , проходящими через  $A$  и  $H$  перпендикулярно  $AB$  (считаем, что границы полосы  $P$  принадлежат ей). Положим  $T = P \cap S$  и пусть  $t = |T|$ . По нашему предположению, отрезок  $AH$  содержит не менее  $\left\lceil \frac{1}{2} : (2\delta) \right\rceil$  точек множества  $S_l$ , откуда

$$t \geq \frac{1}{4\delta}. \quad (2)$$

Заметим, что  $T$  содержится в  $Q = P \cap D_B$ . Множество  $Q$  – сегмент, и его проекция  $Q_a$  – это отрезок длины

$$2\sqrt{M^2 - \left(M - \frac{1}{2}\right)^2} < 2\sqrt{M}.$$

С другой стороны, для любых двух точек  $X, Y \in T$  имеем  $XY \geq 1$  и  $X_l Y_l \leq \frac{1}{2}$ , значит,  $X_a Y_a = \sqrt{XY^2 - X_l Y_l^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Итак,  $t$  точек, составляющие множество  $T_a$ , лежат на отрезке длины меньше  $2\sqrt{M}$ , и они не менее чем на  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  удалены друг от друга. Поэтому  $2\sqrt{M} > (t-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$ , или

$$t < 1 + \frac{4\sqrt{M}}{\sqrt{3}} < 4\sqrt{M}, \quad (3)$$

поскольку  $M \geq 1$ .

Из оценок (1), (2) и (3) получаем

$$\frac{1}{4\delta} \leq t < 4\sqrt{M} < 4\sqrt{2n\delta}, \text{ откуда } 512n\delta^3 > 1,$$

что неверно для выбранного  $\delta$ .

## Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России

### Математика

1. 1 км/ч .

2.  $a_4 b_4 = -6$ .

Докажем, что  $a_2 b_3 = a_3 b_2$ . Умножим первое уравнение исходной системы на  $b_2$  и вычтем из него второе уравнение, умноженное на  $b_1$ . В результате получим  $a_2 \cdot \Delta = b_2$ . Здесь  $\Delta = b_2 b_3 - b_1 b_4$ . Аналогично, из третьего и четвертого уравнений найдем, что  $a_3 \cdot \Delta = b_3$ . Заметим, что  $\Delta \neq 0$ , так как в противном случае из последнего равенства следовало бы, что  $b_3 = 0$ , а значит, и  $a_2 b_3 = 0$ , что противоречит условию задачи. Из этих двух равенств легко следует, что  $a_2 b_3 = a_3 b_2$ . Из этого равенства и последнего уравнения системы получаем  $a_4 b_4 = 1 - a_3 b_2 = 1 - a_2 b_3 = -6$ .

3.  $(-1, -1, 0)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(2, 5, 2)$  (при условии  $x \leq y$ ).

Пусть сначала  $x = y$ . Исходное уравнение в этом случае примет вид

$$2^{x+1} = 6^t. \quad (1)$$

Если  $t > 0$ , то правая часть (1) кратна трем, а левая – нет. Значит,  $t \leq 0$ . Если же предположить, что  $t < 0$ , то, переписав (1) в виде  $2^{-x-1} = 6^{-t}$ , вновь придем к противоречию: кратное трем число  $6^{-t}$  не может быть никакой степенью двойки. Поэтому  $t = 0$  и  $x = y = -1$ .

Пусть теперь числа  $x$  и  $y$  различны. Можно считать, что  $x < y$ . Положим

$$y = x + n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Исходное уравнение запишется в виде

$$2^x \cdot (1 + 2^n) = 6^t. \quad (3)$$

Заметим, что  $t \geq 0$ . Действительно, из (3) следует, что  $3^{-t} \cdot (1 + 2^n) = 2^{t-x}$ . Если  $t < 0$ , то левая часть последнего равенства делится на 3, а правая – нет. Значит,  $t \geq 0$ . Но тогда и  $x \geq 0$  (иначе, согласно (3), дробное число равнялось бы целому). Число 2 входит в канонические разложения на простые множители левой и правой частей (3) в одной и той же степени, поэтому

$$x = t. \quad (4)$$

Сократив обе части (3) на  $2^x$  и перенеся 1 в другую часть, получим

$$2^n = 3^t - 1. \quad (5)$$

Решим уравнение (5), предполагая  $n$  натуральным, а  $t$  – неотрицательным целым.

Пусть  $n = 1$ . Тогда  $t = 1$ . С учетом (2) и (4) находим решение исходного уравнения:  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $t = 1$ .

Пусть  $n > 1$ . Тогда левая часть (5) кратна 4. Если  $t$  нечетно, то правая часть (5) на 4 не делится. Значит,  $t = 2m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \geq 0$ . Из (5) следует, что  $2^n = (3^m - 1)(3^m + 1)$ . Следовательно, числа  $3^m - 1$  и  $3^m + 1$  являются степенями двойки. Заметим также, что на числовой оси эти числа находятся друг от друга на расстоянии 2. Такое возможно, только если  $3^m - 1 = 2$  и  $3^m + 1 = 4$ . Отсюда  $m = 1$  и тогда  $t = 2$ ,  $n = 3$ . Подставляя найденные значения в (2) и (4), получаем решение  $x = 2$ ,  $y = 5$ ,  $t = 2$ .

4.  $CD = R$ .

Градусные меры дуг  $AD$  и  $CA$  равны соответственно  $2 \cdot (180^\circ - \angle E)$  и  $2 \cdot (180^\circ - \angle B)$ . Сумма градусных мер дуг  $AD$ ,  $CA$  и  $DC$  равна  $360^\circ$ . Значит, величина угла  $CAD$  (равная половине градусной меры дуги  $DC$ ) определяется равенством

$$\angle CAD = \angle B + \angle E - 180^\circ = 30^\circ.$$

По формуле для радиуса описанной около треугольника  $CAD$  окружности находим

$$R = \frac{CD}{2 \sin \angle CAD} = CD.$$

5.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Обозначим длину искомой медианы  $AD$  через  $m$ . На прямой  $AD$  вне треугольника отметим такую точку  $F$ , что  $OD = DF = m/3$  (рис.3). Четырехугольник  $OBFC$  – параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам (по условию  $BD = DC$ , а  $OD = DF$  по построению). В параллелограмме противоположные углы равны, следовательно,  $\angle CFB = \angle BOC$ .

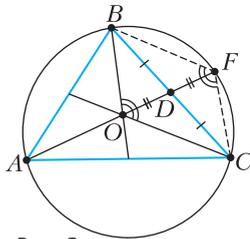


Рис. 3

Значит, в четырехугольнике  $ABFC$  сумма противоположных углов  $BAC$  и  $CFB$  равна  $180^\circ$ , поэтому вокруг него можно описать окружность. Известно, что если две хорды окружности,  $BC$  и  $AF$ , пересекаются в точке  $D$ , то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, т.е.  $BD \cdot DC = AD \cdot DF$ , или  $(a/2)^2 = m \cdot m/3$ . Отсюда  $m = a\sqrt{3}/2$ .

6. 0,50.

Заметим, что точки  $B$  и  $C$  лежат на прямой  $y = 2x + 1$ . Их абсциссы отличаются на 1, следова-

тельно,  $BC = \sqrt{5}$ . Длина высоты треугольника  $ABC$ , проведенной из вершины  $A$ , равна расстоянию  $h$  от точки  $A$  до прямой  $y = 2x + 1$ , которое, в свою очередь, равно  $1/\sqrt{5}$ . Искомая площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2}.$$

7.  $\frac{4^{50} + 2}{3}$ .

Каждое 100-значное натуральное число может быть получено дописыванием двух цифр справа к 98-значному числу. Пусть  $x$  – некоторое 98-значное число, в записи которого есть только цифры 1 и 2. Посмотрим, какие справа две цифры (каждая из которых равна 1 или 2) нужно к числу  $x$  приписать, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 3. Воспользуемся тем, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Пусть наше число  $x$  при делении на 3 дает остаток  $m$ . Тогда

если  $m = 0$ , то припишем 12 или 21;

если  $m = 1$ , то припишем 11;

если  $m = 2$ , то припишем 22.

Таким образом, из каждого 98-значного числа, кратного 3, можно получить два кратных трем 100-значных числа. Каждое не кратное трем 98-значное число порождает только одно кратное трем 100-значное число. Всего 98-значных чисел, составленных из цифр 1 и 2,  $2^{98}$ . Пусть среди них  $A_{98}$  чисел кратно трем. Тогда количество кратных трем 100-значных чисел может быть найдено по формуле  $A_{100} = 2A_{98} + (2^{98} - A_{98}) = 2^{98} + A_{98}$ .

Верны, таким образом, следующие соотношения:

$$A_{100} = 2^{98} + A_{98},$$

$$A_{98} = 2^{96} + A_{96},$$

...

$$A_6 = 2^4 + A_4,$$

$$A_4 = 2^2 + A_2.$$

Сложив эти равенства, получим  $A_{100} = A_2 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{98}$ . Остается просуммировать геометрическую прогрессию и заметить, что  $A_2 = 2$ .

$$\text{Тогда } A_{100} = 2 + \frac{4^{50} - 4}{3} = \frac{4^{50} + 2}{3}.$$

8. Например,  $\sqrt{1105}$ .

Если каждое из чисел  $a$  и  $b$  представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения. Более того, произведение, как правило, представимо в виде суммы двух квадратов большим количеством способов, чем каждый из сомножителей. Например, число 5 в виде суммы двух квадратов неотрицательных чисел представимо единственным с точностью до пере-

становки слагаемых способом:  $5 = 2^2 + 1^2$ , число 13 тоже только одним способом:  $13 = 2^2 + 3^2$ , а вот их произведение уже двумя:  $65 = 5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2$ . Добавив еще один простой множитель, дающий остаток 1 при делении на 4, получим 4 способа:

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2.$$

Значит, на окружности радиуса  $R = \sqrt{1105}$  в первой четверти лежат 8 целочисленных точек: (4;33), (33;4), (9;32), (32;9), (12;31), (31;12), (23;24), (24;23). Следовательно, всего на этой окружности лежат 32 целочисленные точки.

9.  $x = -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \sin x \cos x (\sin x + \cos x) + 6 \cos^3 x &= 0, \\ \sin^3 x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x + 6 \cos^3 x &= 0. \end{aligned}$$

Если  $\cos x = 0$ , то  $\sin x = 0$ , чего быть не может. Разделим на  $\cos^3 x$ :

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 6 = 0.$$

Сделаем замену  $y = \operatorname{tg} x$ :

$$\begin{aligned} y^3 + y^2 + y + 6 &= 0, \\ (y + 2)(y^2 - y + 3) &= 0, \end{aligned}$$

$$y = -2, \operatorname{tg} x = -2, x = -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10. Например, система дорог с двумя перекрестками на параллельной двум сторонам оси симметрии квадрата (рис.4,е). Из каждого перекрестка дороги выходят под углами  $120^\circ$ . Их суммарная длина равна  $4 \cdot (\sqrt{3} + 1) < 11$ .

Ясно, что искомая система дорог должна иметь перекрестки. Чтобы понять, каким образом можно эффективно уменьшать общую длину дорог, полезно прежде обратить внимание на некоторые свойства, которыми кратчайшая система дорог обязана обладать:

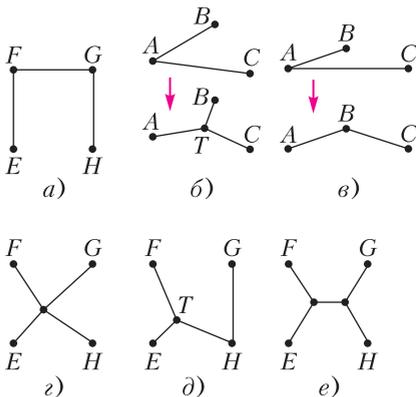


Рис. 4

i. Кратчайшая система дорог состоит из отрезков, соединяющих перекрестки и вершины квадрата.

ii. Каждый перекресток должен быть соединен минимум с тремя вершинами графа (вершинами квадрата или перекрестками).

iii. Угол между любыми двумя дорогами, выходящими из одного перекрестка (или из одной вершины квадрата), не может быть меньше  $120^\circ$ . Действительно, пусть из точки  $A$  выходят дороги  $AB$  и  $AC$  и угол  $BAC$  меньше  $120^\circ$ . Тогда дороги  $AB$  и  $AC$  можно заменить дорогами с меньшей суммарной длиной. Если в треугольнике  $ABC$  все внутренние углы меньше  $120^\circ$ , то дороги  $AB$  и  $AC$  заменим на дороги  $TA, TB$  и  $TC$ , где  $T$  – точка Торричелли треугольника  $ABC$  (рис.4,б). Если же, например, угол  $B$  больше  $120^\circ$ , то  $AB$  и  $AC$  заменим на  $AB$  и  $BC$  (рис.4,в).

iv. Из одного перекрестка выходят ровно три дороги под углами  $120^\circ$  (иначе длина дорог может быть уменьшена). Это немедленно следует из свойств (ii) и (iii).

Предположим, что система дорог обладает одним перекрестком. Если он соединен со всеми вершинами (рис.4,з), то длина дорог не меньше суммы диагоналей, которая равна  $8\sqrt{2} > 11$ . Если же он соединен только с тремя вершинами (рис.4,д), то  $T$  – точка Торричелли треугольника  $EFH$ , вершина  $G$  соединена с  $F$ . В этом случае длина дорог приблизительно равна 11,7. Более того, нарушено свойство (iii), так как  $\angle THG < 120^\circ$ , а значит, длину дорог можно уменьшить, добавив еще один перекресток (как в случае на рис.4,б).

Пусть перекрестков два. Из соображений симметрии расположим их на параллельной двум сторонам оси симметрии квадрата (рис.4,е) так, чтобы из каждого перекрестка дороги выходили под углами  $120^\circ$  (свойство (iv)). В этом случае суммарная длина дорог равна  $4 \cdot (\sqrt{3} + 1) < 10,92$ .

11.  $MK : AC = \frac{2}{\sqrt{10}}$ .

Проведем высоты  $AK_1$  и  $CM_1$ . Достаточно показать, что треугольники  $M_1BK_1, MBK$  и  $ABC$  друг другу подобны; отсюда будет легко найти требуемое отношение.

12.  $x \in (2^{-\sqrt{2}}; 2) \cup (2; 2^{\sqrt{2}})$ .

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} 2^{\log_2^2 x} - 12x^{\log_{0,5} x} &< 3 - \log_{3-x} (x^2 - 6x + 9) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^{\log_2 x} - 12x^{-\log_2 x} &< 3 - \log_{3-x} (3-x)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_2 x} - 12x^{-\log_2 x} < 1, & (1) \\ x < 3, x \neq 2. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Решим неравенство (1) системы. Обозначим  $x^{\log_2 x} = y, y > 0$ . Тогда

$$(1) \Leftrightarrow y - \frac{12}{y} < 1 \Leftrightarrow \frac{(y+3)(y-4)}{y} < 0.$$

Так как  $y > 0$ , то  $y \in (0; 4)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} x^{\log_2 x} < 4 &\Leftrightarrow \log_2^2 x < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < \log_2 x < \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{-\sqrt{2}} < x < 2^{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Это ответ в неравенстве (1).

Далее учтем ограничения (2). Для этого сравним числа  $2^{\sqrt{2}}$  и 3. Заметим, что  $2^{\sqrt{2}} < 2^{1.5}$  и  $2^{1.5} < 3$ , так как  $8 = (2^{1.5})^2 < 3^2 = 9$ . Поэтому  $2^{\sqrt{2}} < 3$ . Запишем ответ с учетом (2).

13.  $t \in \{0; 1\}$ .

Сделаем замену:

$$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \alpha \in (-\pi; \pi). \quad (1)$$

Тогда

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin \alpha, \quad \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos \alpha,$$

и исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{\sin \alpha} + \sqrt[3]{\cos \alpha} = 1. \quad (2)$$

Если  $\cos \alpha < 0$ , то левая часть строго меньше правой и корней у (2) нет. В случае же, когда  $\cos \alpha \geq 0$  и  $\sin \alpha \geq 0$ , имеем очевидное неравенство:

$$\sqrt{\sin \alpha} + \sqrt[3]{\cos \alpha} \geq \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Причем равенство достигается, только когда или  $\cos \alpha = 1$  или  $\sin \alpha = 1$ . Значит, либо  $\alpha = 0$ , либо  $\alpha = \pi/2$ . Подставив найденные значения  $\alpha$  в (1), найдем искомое  $t$ .

14.  $V = \frac{S(r_1 + r_2)}{3}$ .

Объем пирамиды  $TABCD$  равен сумме объемов пирамид  $TBCD$  и  $TABD$  (рис.5):  $V_{TABCD} = V_{TBCD} + V_{TABD}$ . Причем  $V_{TABD} = V_{TACD}$ , так как у пирамид  $TABD$  и  $TACD$  общая высота (из вершины  $T$ ), а также равны площади оснований:  $S_{ABD} = S_{ACD}$  (у этих треугольников общее основание  $BC$  и равные по длине высоты, проведенные из вершин  $B$  и  $C$ , поскольку  $ABCD$  – трапеция по условию). Итак,

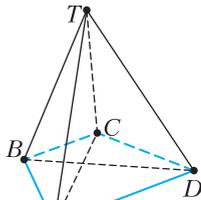


Рис. 5

$$V_{TABCD} = V_{TBCD} + V_{TACD} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_2 + \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_1.$$

15.  $S_{ABC} = \frac{25}{6}$ .

Длины перпендикуляров, опущенных из точки  $Q$  основания  $AC$ , обозначим через  $d_1$  и  $d_2$ ; пусть  $\angle B = \beta$ . Четырехугольник  $MBKQ$  вписан в окружность, и  $BQ$  ее диаметр. По формуле для радиуса описанной около треугольника  $MBK$  окружности имеем

$$BQ = MK/\sin \beta \Rightarrow MK = BQ \cdot \sin \beta. \quad (1)$$

Поскольку величина угла  $\beta$  фиксирована, длина отрезка  $MK$  тем меньше, чем меньше длина  $BQ$ . Значит, точка  $Q$  – это основание перпендикуляра, опущенного из точки  $B$  на  $AC$ , и  $BQ$  – высота (основание перпендикуляра  $Q$  лежит именно на стороне  $AC$ , а не на ее продолжении, так как углы  $A$  и  $C$  острые; если бы, скажем, угол  $A$  был тупым, то точка  $M$  оказалась бы на продолжении стороны  $AB$ , а не на ней самой); положим  $BQ = h$ . Найдем площадь  $\triangle ABQ$ , считая пока  $h$  известной величиной.

$$\text{Имеем } AQ = h/\sin \angle A = h/\sqrt{1-d_1^2/h^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{ABQ} &= \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_1^2}}. \text{ Аналогично, } S_{BQC} = \\ &= \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_2^2}}. \text{ Искомая площадь равна их сумме:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABQ} + S_{BQC} = \\ &= \frac{h^4}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{h^2-d_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{h^2-d_2^2}} \right). \quad (2) \end{aligned}$$

Остается найти  $h$ . Так как  $h = BQ$ , то из (1) следует, что  $h = MK/\sin \beta$ . Найдем  $MK$  из  $\triangle MKQ$  (в нем  $\angle MQK = 180^\circ - \beta$ ) по теореме косинусов:

$$MK^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 \cos \beta.$$

Итак,

$$h = MK/\sin \beta = \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 \cos \beta}}{\sin \beta}.$$

Чтобы воспользоваться (2), прежде для удобства вычислим:

$$\begin{aligned} h^2 - d_1^2 &= \frac{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 \cos \beta - d_1^2 \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \\ &= \frac{(d_1 \cos \beta + d_2)^2}{\sin^2 \beta}. \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично, } h^2 - d_2^2 = \frac{(d_2 \cos \beta + d_1)^2}{\sin^2 \beta}.$$

Подставив полученные выражения в (2), находим

$$S_{ABC} = \frac{(d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 \cos \beta)^2}{2(d_1 \cos \beta + d_2)(d_2 \cos \beta + d_1) \sin \beta}.$$

Используя теперь числовые данные задачи, получаем ответ.

**16.** Решениями  $(a, b)$  (при условии  $a \leq b$ ) служат те и только те пары чисел  $(a_n, b_n)$ , которые при каждом  $n \in \mathbb{N}$  вычисляются по формулам:  $a_n = b_{n-1}$ ,  $b_n = k^2 b_{n-1} - a_{n-1}$ ,  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = k$ ; здесь  $k = 29$ .

Пусть пара чисел  $(a, b)$  удовлетворяет уравнению задачи:

$$a^2 + b^2 = k^2(ab + 1), \quad k = 29. \quad (1)$$

Предположим, что одно из чисел, например  $a$ , равно нулю. Тогда, очевидно,  $b = k$ . Поэтому далее будем рассматривать такие решения  $(a, b)$  уравнения (1), для которых

$$a \neq 0, \quad b \neq 0. \quad (2)$$

Более того, будем предполагать, что

$$a \leq b. \quad (3)$$

Итак, пусть пара  $(a_0, b_0)$  удовлетворяет (1), а также условиям (2), (3). Из (1) находим, что

$$b_0^2 - k^2 a_0 b_0 + a_0^2 - k^2 = 0.$$

Это равенство можно трактовать как квадратное уравнение относительно неизвестной  $b_0$ . По теореме Виета, помимо, собственно,  $b_0$ , это уравнение еще имеет корень  $b'_0$  такой, что

$$b_0 + b'_0 = k^2 a_0, \quad (4)$$

$$b_0 b'_0 = a_0^2 - k^2. \quad (5)$$

**Утверждение.** Этот новый корень  $b'_0$  удовлетворяет условиям:  $b'_0 \geq 0$ ,  $b'_0 \in \mathbb{Z}$  и  $b'_0 < a_0$ .

**Доказательство.** Числа  $a_0$  и  $b'_0$  удовлетворяют (1), поэтому  $b'_0 \geq 0$  (иначе правая часть (1) была бы отрицательной, так как, по условию задачи и в силу (2),  $a_0 > 0$ ). Из (4) следует, что неотрицательное  $b'_0$  является целым, а из (5) – что  $b'_0 = \frac{a_0^2 - k^2}{b_0}$ . Установим, что  $b'_0 < a_0$ . Действительно,

$$b'_0 < a_0 \Leftrightarrow \frac{a_0^2 - k^2}{b_0} < a_0 \Leftrightarrow a_0^2 - k^2 < a_0 b_0 \Leftrightarrow a_0^2 \leq a_0 b_0.$$

Последнее верно в силу (3).

Таким образом, пара  $(a_0, b_0)$ , удовлетворяющая уравнению (1) и ограничениям (2), (3), порождает новую пару (см. (4)) вида  $(b'_0, a_0) = (k^2 a_0 - b_0, a_0)$ , которая также удовлетворяет (1), (2), (3) (если, конечно,  $a_0 \neq k$ ; так как, согласно (5),  $b'_0$  еще может быть найден по формуле  $b'_0 = \frac{a_0^2 - k^2}{b_0}$ , так что если  $a_0 = k$ , то (3) не будет

выполнено). Будем эту новую пару обозначать как  $(a_1, b_1)$ . Затем по тем же формулам можно из пары  $(a_1, b_1)$  получить еще решение  $(a_2, b_2)$  и т.д. Символически полученный результат представим следующим образом:

$$(a_0, b_0) \rightarrow (a_1, b_1) = (k^2 a_0 - b_0, a_0) \rightarrow (a_2, b_2) \rightarrow \dots \quad (6)$$

Здесь  $a_m = k^2 a_{m-1} - b_{m-1}$ ,  $b_m = a_{m-1}$ , при этом

$$a_m > a_{m-1} \quad (7)$$

(см. утверждение).

Сразу же отметим и формулы обратного преобразования:

$$a_{m-1} = b_m, \quad b_{m-1} = k^2 b_m - a_m, \quad (7')$$

с помощью которых можно цепочку (6) продолжить влево. С помощью правила (7) из одного решения  $(a_0, b_0)$ , удовлетворяющего (1), (2), (3), мы можем получить лишь конечное число новых решений уравнения (1), так как, согласно доказанному утверждению,  $a_0 > a_1 > a_2 > \dots \geq 0$ . Значит, на каком-то шаге обязательно получится  $a_n = 0$  (тогда, как было показано выше,  $b_n = k$ ). Чтобы на  $n$ -м шаге получить 0, на предыдущем шаге должно было быть  $a_{n-1} = k$  (подставив  $a = a_{n-1} = k$  в (1), найдем  $b_{n-1} = k^3$ ). Таким образом, окончание цепочки (6) выглядит так:

$$\dots \rightarrow (a_{n-1}, b_{n-1}) = (k, k^3) \rightarrow (a_n, b_n) = (0, k). \quad (8)$$

(Цепочку (8) вправо продолжать смысла нет, так как далее  $(0, k) \rightarrow (-k, 0) \rightarrow (0, k) \rightarrow \dots$ ) А вот что предшествует паре  $(a_{n-1}, b_{n-1}) = (k, k^3)$ ? Согласно (7'), на предыдущем шаге  $a_{n-2} = k^3$ ,  $b_{n-2} = k^5 - k$  – и это тоже решение уравнения (1)! Можно продолжить, получая новые решения:  $a_{n-2} = k^5 - k$ ,  $b_{n-2} = k^7 - 2k^3$  и так далее. Значит, всего решений у уравнения (1) бесконечно много, так как цепочку (8) можно продолжить влево сколь угодно далеко.

Поясним, почему (8) содержит *все решения* (1), удовлетворяющие условию (3). Пусть  $(a^*, b^*)$  – какое-то (удовлетворяющее (3)) решение уравнения (1). Было показано, что с помощью формул (7) из решения  $(a^*, b^*)$  можно получить цепочку новых решений (см. (6)), которая непременно закончится решением  $(0, k)$ . Но это и означает, что  $(a^*, b^*)$  содержится в (8), ведь, приняв теперь решение  $(0, k)$  за отправную точку, мы с помощью обратных преобразований (7') вернемся к  $(a^*, b^*)$  (а цепочка (8) именно так и устроена: начав с  $(0, k)$ , мы с помощью (7') получаем ее всю).

Чтобы записать ответ, несколько поменяем нумерацию: положим  $(a_0, b_0) = (0, k)$  и двинемся с помощью (7') по цепочке (8) влево (у нас будет  $(a_1, b_1) = (k, k^3)$ ,  $(a_2, b_2) = (k^3, k^5 - k)$  и т.д.).

**Физика**

*8 класс*

1.  $v_2 = \frac{2v_{cp}v_1}{3v_1 - v_{cp}}$ .
2.  $l_2 = \frac{m_1}{2m_2} l$ .
3.  $h = \frac{p_a}{\rho_M g}$ .
4.  $F = \frac{(M\eta - m)g}{1 + \eta}$ .
5.  $Q = c_d m(t_{пл} - t_n) + \lambda_d m + c_b m(t_k - t_{пл}) + r_b m = 6 \text{ МДж}$ .

*9 класс*

2.  $\eta = \frac{m_b/M_b}{m_k/M_k} = 3$ .
4.  $a_n = a_b = \frac{F}{M + m}$ ,  $F_{тр} = \frac{MF}{M + m}$ , если  $0 < F \leq \mu mg \left(1 + \frac{m}{M}\right)$  (доски движутся относительно стола как единое целое);  $a_n = \frac{\mu mg}{M}$ ,  $a_b = \frac{F - \mu mg}{m}$ ,  $F_{тр} = \mu mg$ , если  $F > \mu mg \left(1 + \frac{m}{M}\right)$  (доски движутся и относительно стола, и относительно друг друга).
5.  $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2$ .

*10 класс*

2.  $v_{cp} = \frac{2g}{\pi} \sqrt{\frac{m}{k}}$  (шарик совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  и амплитудой  $l = \frac{mg}{k}$ ).
4.  $T_1 = \frac{T}{2}$  (бусинка совершает гармонические колебания с периодом  $T = \pi \sqrt{\frac{ml^3}{kQq}}$ ).
5.  $\alpha = 2 \arcsin \frac{BLCU}{2m\sqrt{gL_0}}$  (за малое время разряда конденсатора стержень получает горизонтальный импульс  $p = mv = BLCU$ , после чего отклоняется от положения равновесия на угол  $\alpha$ ).

*11 класс*

1.  $v = 0$  (состояние системы можно разделить на 3 этапа: движение влево до момента времени  $t_1$ , система неподвижна и движение вправо с момента  $t_2$ ; в соответствии со вторым законом Ньютона,  $t_1 = 2$  с и  $t_2 = 14$  с; следовательно в момент  $t_0 = 10$  с система неподвижна).

2.  $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$  (кинетическая энергия колесика складывается из энергии поступательного движения и равной ей энергии вращательного движения).

5. На каждом из четырех участков колец, расположенных между точками касаний  $a$  и  $b$ , возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E} = 2BvR \sin \frac{\alpha}{2}$ . Эквивалентная электрическая схема изображена на рисунке 4.

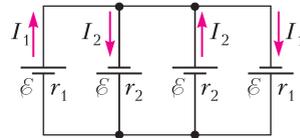


Рис. 4

Сопrotивления участков попарно одинаковы и равны

$$r_1 = \frac{r(2\pi - \alpha)}{2\pi} \text{ и } r_2 = \frac{r\alpha}{2\pi}.$$

Направления токов на каждом участке указаны на рисунке. Величины токов определяются с помощью законов Кирхгофа и равны

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r_1} \text{ и } I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r_2}.$$

В силу симметрии задачи результирующая сила Ампера, действующая со стороны магнитного поля на каждое из колец, направлена вдоль прямой, проходящей через центры колец, противоположно вектору скорости этого кольца. Модуль силы Ампера равен

$$F = \sum_i (I_1 + I_2) B \Delta l_i \cos \varphi_i = (I_1 + I_2) B \sum_i \Delta l_i \cos \varphi_i = (I_1 + I_2) B l_{ab} = \frac{vB^2 R^2}{r} \frac{16\pi^2}{\alpha(2\pi - \alpha)} \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

где  $\Delta l_i$  – малый участок кольца, на который действует сила Ампера  $F_i$ , направленная вдоль радиуса кольца под углом  $\varphi_i$  к прямой, проходящей через центры колец,  $l_{ab}$  – расстояние между точками касания  $a$  и  $b$ ; суммирование ведется по

всем углам  $\varphi_i$  в пределах от  $-\alpha/2$  до  $\alpha/2$  (на остальных сегментах колец силы Ампера взаимно компенсируются).

### Математика и криптография

- 91854.
- $p = 7$ ,  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 5$ ,  $p_3 = 11$  (при условии  $p_1 < p_2 < p_3$ ).
- Сегодня.
- Выходим в шесть.
- ВИСОКОС.
- Например,  
 $A_1: w + x = w_0 + x_0$ ,  $x + y = x_0 + y_0$ ;  
 $A_2: w + x = w_0 + x_0$ ,  $x + y + z = x_0 + y_0 + z_0$ ;  
 $A_3: y + z = y_0 + z_0$ ,  $w + x + y = w_0 + x_0 + y_0$ ;  
 $A_4: w + x + y = w_0 + x_0 + y_0$ ,  $x + y + z = x_0 + y_0 + z_0$ .
- СКОРОПЕРЕМЕНА.
- 10946.
- 27.

### Новосибирский государственный университет ФИЗИКА

ОЛИМПИАДА «ТВОЙ ПУТЬ  
В НАСТОЯЩУЮ НАУКУ»

#### I (отборочный) этап Интернет-тур

8 класс

- $l = 0,5$  м.
  - $t = \frac{L(m_1 + m_2)}{m_1 v_1 + m_2 v_2}$ .
  - $v_{\text{ср}} = \frac{v_1 v_2 + u(v_1 + v_2)/2}{u + (v_1 + v_2)/2}$ .
  - $T_x = T_0 + \frac{V}{Q t_0} (T_1 - T_0) = 45$  °С.
- 9 класс
- $N = 2$ .
  - $L = \frac{u^2}{2g} (\sin \alpha + \cos \alpha) (3 \cos \alpha - \sin \alpha)$ .
  - $R = \frac{13}{23} r$  (нарисуйте эквивалентную схему).
  - $H_1 = H \frac{m^2}{(m + M)^2} + \frac{M^2 g}{2k(m + M)}$  (шарик оторвется в тот момент, когда пружина будет недеформированной).

10 класс

- $l = \sqrt{(x_{\text{н}} - x_{\text{к}})^2 + (y_{\text{н}} - y_{\text{к}})^2} = t \sqrt{u^2 + \left(v - \frac{gt}{2}\right)^2}$ .
- $p = \frac{3Mg}{2S}$ .
- $\mu = \frac{u^2}{2g} \left( \frac{1}{\sqrt{l_1}} - \frac{1}{\sqrt{l_2}} \right)^2$  (вся приобретенная после абсолютно неупругих ударов кинетическая энергия расходуется на работу против силы трения).
- $l = \frac{u^2}{2g} \cos^2 \alpha \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) (2(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta) \operatorname{ctg} \beta)$ .

11 класс

- $p'_2 = (p_1 - p'_1) \frac{V_1}{V_2} + p_2$ .
- $m = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \frac{kR}{g}$  (на шайбу действуют: сила тяжести, направленная вертикально вниз; сила упругости, направленная по касательной к кольцу; сила реакции, перпендикулярная кольцу).
- Тело начнет двигаться вправо.
- $q_1 = \frac{2q_2 q_3}{3q_2 + q_3/4}$  (центр масс системы бусинок остается неподвижным).

#### Второй тур

8 класс

- $V = 7V_0$ .
- $\rho_{\text{к}} = 0,2\rho$ .
- $x = \frac{2}{3} d = 1$  см.
- $T_{\text{г}} = 80$  °С.

9 класс

- $\Delta t = \frac{\pi r_1 r_2}{v_1 r_2 - v_2 r_1} \approx 63$  с.
- $\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ .
- $N = 2020$ .
- $H = \frac{4L(L - d)h}{d^2}$ .

10 класс

- $l_{\text{min}} = l = 3,4$  км,  $l_{\text{max}} = \sqrt{2}l \approx 4,8$  км.
- $p'_3 = \frac{p_1 + p_2}{4} + \frac{p_3}{2}$ .

$$3. d_x = \frac{d_1 + d_2}{12}.$$

$$4. R_{AB} = \frac{4\pi r\rho}{\sqrt{3\pi + 9}}.$$

11 класс

$$1. l_1 = 205 \text{ м.}$$

$$2. \varphi = \frac{3}{2 + 4\sqrt{3}} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \text{ (воспользуйтесь принципом суперпозиции).}$$

$$3. \frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{M}{m}.$$

$$4. \beta = \arccos(\mu \operatorname{ctg} \alpha), v_{\max} =$$

$$= \sqrt{2gL \left( \sin \alpha \sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \mu \cos \alpha \arccos(\mu \operatorname{ctg} \alpha) \right)}$$

(на шайбу действуют: сила тяжести, направленная вертикально вниз; сила натяжения нити, направленная вдоль нити; сила реакции наклонной плоскости, направленная перпендикулярно плоскости; сила трения, направленная против скорости, т.е. перпендикулярно нити; скорость шайбы максимальна, когда равно нулю ускорение, перпендикулярное нити).

## II (заключительный) этап

8 класс

$$1. \Delta t = 590 \text{ с.}$$

$$2. Q = \frac{\lambda\rho(F - F')}{(\rho_0 - \rho)g} \text{ (во втором случае температура в сосуде равна } 0^\circ \text{C).}$$

$$3. \mu = \frac{\rho_0 a^3}{2(a - \Delta h)}.$$

$$4. \Delta h = \frac{\rho_1 \alpha V}{\rho_2 S} \text{ (уровень тяжелой жидкости повысится).}$$

9 класс

$$1. \Delta h = \frac{g(\tau^2 - T^2)}{8}.$$

$$2. v_C = \sqrt{g(a + 4b)}.$$

$$3. v_0 = \sqrt{2\mu gL}.$$

$$4. H = \frac{R}{\cos \alpha} + \frac{g \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\omega^2}.$$

$$5. u = v \frac{\sqrt{\tau_2/\tau_1} - 1}{\sqrt{\tau_2/\tau_1} + 1}.$$

10 класс

$$1. \frac{k_2}{k_1} = 1 - \frac{2a}{L}.$$

$$2. V = \left( \frac{p_0}{2\rho g} + \frac{H}{2} + 2h \right) S.$$

$$3. p = p_0 \frac{v_C + v_B/2 + v_A/3}{v_C + v_B + v_A}.$$

$$4. \alpha \geq \frac{25}{16}.$$

$$5. U = \frac{2Qd}{3\epsilon_0 S}.$$

11 класс

$$1. t = 610 \text{ с.}$$

$$2. P = 2 \frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2} (L_1 - L_2) = 15 \text{ Н.}$$

$$3. \alpha = \arg \operatorname{tg} \sqrt[3]{\frac{q_1}{q_2}}.$$

$$4. v = 2 \frac{Mg}{QB}.$$

5. Будем считать котел цистерны цилиндрическим сосудом длиной  $L \approx 10$  м и диаметром  $2R \approx 3$  м. Пусть в цистерне жидкость плотностью  $\rho$  совершает малые колебания. Рассмотрим сечение цистерны вертикальной плоскостью, проходящей через ее ось, в двух состояниях: 1) поверхность жидкости горизонтальна (плоскость равновесия), потенциальная энергия минимальна, примем ее за ноль, кинетическая энергия максимальна и равна  $E_k$ ; 2) поверхность жидкости наклонена так, что на краю цистерны жидкость поднимается на малую высоту  $x$  над плоскостью равновесия, кинетическая энергия минимальна, приближенно равна нулю, потенциальная энергия максимальна и равна  $E_{II}$ . В состоянии 2 над плоскостью равновесия выступает объем жидкости

$$V_x = 2R \left( \frac{1}{2} \frac{L}{2} x \right) = \frac{1}{2} RLx,$$

его центр тяжести находится на высоте  $x/3$  над плоскостью равновесия, а в состоянии 1 он находился ниже этой плоскости на  $x/3$ . Следовательно, центр тяжести жидкости объемом  $V_x$  при переходе из состояния 1 в 2 поднялся на высоту  $2x/3$ , и

$$E_{II} = \rho V_x g \cdot \frac{2}{3} x.$$

Переход из состояния 2 в 1 занимает четверть периода колебаний ( $T/4$ ), и за это время из одной

половины цистерны в другую через сечение  $S = \frac{1}{2} \pi R^2$  перетекает объем  $V_x$  жидкости. Если скорость потока жидкости равна  $v$ , то

$$V_x = \frac{1}{4} T v S.$$

При этом кинетическая энергия жидкости

$$E_k \approx \frac{1}{2} \left( \rho \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 L \right) v^2.$$

Здесь мы для оценки полагаем, что в состоянии 1 вся жидкость, занимающая половину объема  $\pi R^2 L$  цистерны, движется с некоторой средней скоростью  $v$ . Из закона сохранения энергии следует, что

$$E_n = E_k.$$

Из полученных равенств найдем

$$T \approx 2 \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{L}{\sqrt{gR}} \approx 5 \text{ с.}$$

**6.** Банка приходит в движение, так как благодаря вращению моторчика центр тяжести всей конструкции отклоняется от вертикальной линии, проходящей через точку опоры банки (точку соприкосновения со столом). Иными словами, сила тяжести, действующая на отсек с батарейками, создает момент силы относительно точки опоры, в результате чего банка приобретает угловую скорость. Для того чтобы банка преодолела препятствие, необходимо, чтобы в момент касания препятствия она обладала достаточной кинетической энергией. Из видеоролика видно, что банка движется по столу неравномерно, так что скорость ее движения в момент касания препятствия зависит от начальных условий: от того, на каком расстоянии от препятствия банку поставили на стол и в каком положении при этом находился отсек с батарейками. Поэтому иногда банка преодолевает препятствие с первой попытки, а иногда первой попытки оказывается недостаточно.

Неравномерное движение банки связано с тем, что блок с батарейками то опережает движение банки (и в это время банка ускоряется), то отстает (тогда банка замедляется и даже некоторое время движется в обратную сторону). Такие «самоподдерживающиеся» колебания возможны при поступлении энергии в механическую систему (в данном случае – благодаря моторчи-

ку). Если же банка остановилась перед препятствием, то через некоторое время, из-за вращения моторчика, блок с батарейками преодолеет верхнее положение и окажется слева от вертикальной линии, проходящей через центр банки, – в результате банка откатится назад. После этого она снова наедет на препятствие, но уже с другими начальными условиями, а значит, с другой скоростью. И таким образом банка будет совершать попытки преодоления препятствия, пока не приблизится к нему в такой «фазе» своего неравномерного движения, в которой ее скорость окажется достаточной для преодоления препятствия.

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 203035**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

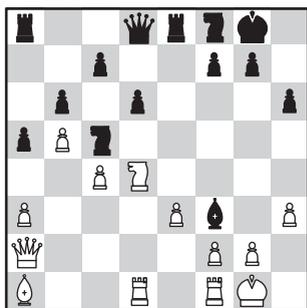
**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 216-40-40**

## Доминация

Мир постепенно накрыла вторая волна коронавируса, что не могло не отразиться на профессиональных шахматах. Едва отыграв несколько «живых» турниров в классику, гроссмейстеры возвратились к онлайн-сражениям на двухмерных досках, а турнир претендентов перенесен на неопределенный срок. В связи с этим мы вернемся к разбору особенностей игры AlphaZero и обратим внимание на центральную тему ее творчества – стремление к максимальной доминации на шахматной доске.

### AlphaZero – Stockfish Лондон, 2018

1. ♔f3 e6 2. c4 ♗f6 3. ♘c3 ♙b4 4. ♜c2 0-0 5. a3 ♘c3 6. ♜c3 d6 7. b4 e5 8. ♗b2 ♗bd7 9. e3 ♖e8 10. d3 ♗f8 11. ♗e2 a5 12. 0-0 ♗g4 13. h3 ♗h5 14. ♜c2 h6 15. ♗c3 b6 16. b5 ♗d7 17. ♗ad1 ♗c5 18. ♗a1 ♗g6 19. ♜b2 ♗a4 20. ♜a2 ♗c5. «Стандартные» шахматные программы оценивают эту позицию как полностью равную, однако AlphaZero отказывается от посторения ходов, так как видит основания для продолжения борьбы за счет преимущества двух слонов и возможного давления по большой диагонали. 21. d4 ed 22. ♗d4 ♗e4 23. ♗f3 ♗f3.



24. gf. Большинство белковых шахматистов взяли бы слона конем, практически не задумываясь, однако AlphaZero согласна на ослабление пешечной структуры в обмен на возможность давления по линии g. 24... ♗fe6

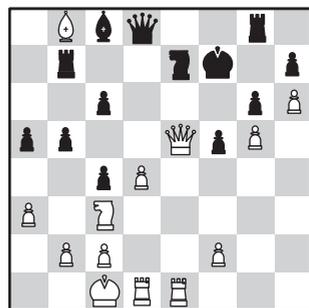
25. ♗h2 ♗d4 26. ♗d4 ♗h7 (26... ♜e7 27. ♗g4 f6 28. ♗g6 с дальнейшим 29. ♗f1 совсем плохо для черных) 27. ♜c2+ g6 28. ♗f4! ♜e7 29. ♗g1! Последние два хода – показатель высочайшего понимания игры искусственным интеллектом. Белые немудомо наращивают преимущество. 29... ♗g8 30. h4 h5 (вынужденно, иначе следует 31. h5) 31. ♗g5 ♗h6 32. e4 ♗e6 33. ♗f6. Белые готовы пожертвовать качество, чтобы избавиться от максимально активного защитника в лагере черных. 33... ♗g5 34. hg+ ♗h7 35. f4 ♗ae8 36. ♗d3 ♗g7 37. f3. Тотальная доминация. Всего за 13 ходов после позиции на диаграмме белые смогли развить активность по черным полям, не дав сопернику ни шанса на ответные действия. 37... ♗g8 38. ♗d4 ♗f8 39. ♗c3 ♗g8 40. a4 ♗d8 41. ♗h3. Король оставался единственной фигурой, не задействованной в атаке, AlphaZero находит возможность использовать и этот ресурс. 41... ♗d7 42. f5 gf 43. ♗f5 ♗e6 (взятие пешки ведет к потере ладьи после 43... ♗g5 44. ♗h8 ♗g8 45. ♗g7+) 44. ♗h4 ♗e7 45. ♗d5 ♗g6 46. ♗h5 ♗e8 47. ♗f6 ♗d7 48. ♗g4 ♗c8 49. ♜c6. Белые форсируют размен ферзей, чтобы исключить возможность контригры, связанной с подрывом c7-c6. 49... ♜e8 50. ♜e8+ ♗e8 51. ♗d5 ♗f6. (51... ♗d7 52. ♗f5 c6 53. ♗d2 cb 54. cb ♗c5+ 55. e5 столь же безразлично для черных) 52. gf ♗d7 53. ♗f5 c6 54. bc+ ♗c6 55. f4 ♗h8 56. e5, и черные признали бессмысленность дальнейшего сопротивления. **Выигрыш белых.**

Если бы AlphaZero читала шахматные книги, то мы могли бы предположить, что она знакома с творчеством Б.Ларсена, обыгравшего более 55 лет назад Л.Портиша в похожем стиле.

### Б. Ларсен – Л. Портиш Амстердам, 1964

1. e4 e6 2. d4 d5 3. ♘c3 ♙b4 4. ed5 ed5 5. ♜f3!? (на тот момент – новинка) ♗c6 (сильней-

ший ответ был найден чуть позже – ♜e7!) 6. ♗b5 ♗ge7 7. ♗f4 0-0 8. 0-0 ♗a5? (потеря темпа, критически важная при разносторонних рокировках, лучше 8... ♗e6) 9. ♗ge2 c6 10. ♗d3 b5 11. h4! (в стиле AlphaZero!) ♗c4 12. h5 f6 13. g4 ♗a5 14. ♗c4 dc4 15. a3 ♗c3. Черные не попались в ловушку: 15... ♗a3 16. ba ♗a3+ 17. ♗d2 b4 18. ♗a1 bc+ 19. ♗c3 ♗b4 20. ♗hb1! с выигрышем ферзя, но после размена слона черные поля становятся слабостью. 16. ♗c3 ♗d8 17. ♗he1 a5 18. ♗g3 ♗a7 19. h6! Белым не обязательно открывать линии на королевском фланге, поскольку они могут атаковать по линии e и ослабленной большой диагонали. 19... g6 20. ♗d6 ♗e8 21. ♜f4 ♗f7 (21... ♗d5 позволяло белым эффектно пожертвовать ферзя: 22. ♗d5 cd 23. ♜f6! ♜f6 24. ♗e8+ ♗f7 25. ♗f8+ ♗e6 26. ♗e1+) 22. ♗e5 f5 23. ♗b8 ♗b7 24. ♜e5 (прозаический выигрыш качества после 24. ♗e4 ♗d5 25. ♗d6+ ♗f8 26. ♗b7 так же хорош для белых) ♗g8 25. g5. Черные полностью парализованы, причем белым даже не пришлось прибегать к жертвам!



25... b4 (25... ♗d5 26. ♗d5 cd 27. ♗d6!) 26. ♜f6+ ♗e8 27. ♜c6+ ♗f7 28. ♜f6+ ♗e8 29. d5 ♗f8 30. ♜c6+ ♗d7 (на 30... ♗f7 решает 31. ♜c4) 31. ♗d6 ♗f7 (в случае 31... ♗c6 32. dc ♗a7 33. ♗d5 ♗f7 34. c7 белую пешку можно остановить только ценой материальных потерь) 32. ♗e7 bc (если 32... ♜c6, то 33. ♗c5+) 33. ♗b4+, и черные сдались.

А. Русанов

Индекс 90964

# Тайны углерода

*Уроки с риском*

Графит, алмаз, фуллерен, графен...  
-и это всё углерод.



(Подробнее – на с. 2 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)